Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro



Espaços Topológicos

Estagiário: Lucas Ozaki

Professora: Thais Fernanda Mendes Monis

2026.2

Prefácio

Este documento foi escrito pelo estagiário e consiste na resolução de alguns dos exercícios deixados pela professora na disciplina de Espaços Topológicos. Em cada capítulo foi adicionado uma seção de exercícios extras, escolhidos e resolvidos pelo estagiário.

Essa se trata de uma primeira versão do documento, então podem haver erros. Caso encontre algum, seja de conceito, resolução, enunciado, erros de digitação, entre outros, favor mandar sugestão no email: lucas.ozaki@unesp.br

Sumário

1 Exercícios para P1 **3**
1.1 Conceitos iniciais, aplicações contínuas e homeomorfismo 3
1.2 Extras P1 21

2 Exercícios para P2 **26**
2.1 Topologia induzida, quociente e produto 26
2.2 Extras P2 50

3 Exercícios para P3 **57**

1. Exercícios para P1

1.1 Conceitos iniciais, aplicações contínuas e homeomorfismo

Exercício 1.1

Mostre que se X possui a topologia discreta então X é metrizável.

Solução. Seja X um espaço qualquer e considere (X, τ), onde $\tau = \mathcal{P}(X)$, i.e, todo subconjunto de X é aberto. Recordemos que a métrica discreta $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ em X é defina por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Primeiro, observe que a topologia induzida por d, τ_d, é dada em termos de bolas abertas, isto é, para cada $x \in X$ e $r > 0$, $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$. Assim, $U \subset X$ é aberto nessa topologia se para qualquer $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$.

Agora, note que pela definição de d, se $r > 1$ então os abertos são caracterizados por $B(x,r) = X$, e caso $r \leq 1$, então os abertos são $B(x,r) = \{x\}$, isto é, conjuntos unitários. Dessa forma, devemos verificar que $\tau_d = \tau$. Note que $\tau_d \subset \tau = \mathcal{P}(X)$ é satisfeita por definição de topologia (i.e., uma coleção de subconjuntos). Por outro lado, considerando $U \subset X$ arbitrário e $x \in U$, temos

$$B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\} \subset U,$$

o qual é aberto pela definição de τ_d e, portanto, $\tau \subset \tau_d$. ■

Exercício 1.2

Seja X um espaço topológico metrizável. Prove que para todo par a, b de pontos de X, com $a \neq b$, existem subconjuntos abertos U_a e U_b contendo a e b, respectivamente, tais que $U_a \cap U_b = \emptyset$.

Solução. De início, observe que sendo X metrizável, existe uma métrica d que induz a topologia τ_d em X, tal que os abertos de τ_d são bolas abertas (veja exercício anterior). Como $a \neq b$, temos $d(a,b) > 0$ e assim basta considerar

$$U_a = B(a,r) \quad \text{e} \quad U_b = B(b,r)$$

onde $r = \dfrac{d(a,b)}{2}$. De fato, caso $U_a \cap U_b \neq \emptyset$ então existe $x \in U_a \cap U_b$ tal que

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < d(a,b),$$

o que sabemos ser uma contradição e, portanto, $U_a \cap U_b = \emptyset$. ■

Exercício 1.3

Use o Exercício 2 para mostrar que se X possui pelo menos dois pontos e possui topologia concreta então X não é metrizável.

Solução. Considere a propriedade do Exercício 2 como "propriedade H". Asim, tal exercício nos diz o seguinte

(E2) Se X é metrizável então vale a propriedade H.

Isto posto, o presente exercício se reduz a provar que se X possui pelo menos dois pontos, então não vale a propriedade H, isto é, exibir um par de pontos distintos que não pode ser separado por abertos disjuntos.

Como X possui pelo menos dois pontos, sejam $a, b \in X$ tal que $a \neq b$. Suponha, por contradição, que X seja metrizável. Assim, por (E2) existem abertos U_a e U_b contendo a e b, respectivamente, tal que $U_a \cap U_b = \emptyset$. Uma vez que X possui a topologia concreta, os únicos abertos da topologia são $\emptyset$ e o próprio X. Devemos, então, analisar as possibilidades para U_a e U_b; analisemos somente para U_a, visto que os argumentos para U_b são análogos.

Considerando U_a, este deve conter o ponto a e, portanto, $U_a \neq \emptyset$. Logo, em razão de X possuir a topologia concreta, a única opção restante é $U_a = X$ e, pelos mesmos argumentos, tem-se $U_b = X$. Dessa forma,

$$U_a \cap U_b = X \cap X = X \neq \emptyset,$$

onde a diferença segue do fato de X conter pelo menos o ponto a (na verdade, contém a e b). Note que isso contradiz a propriedade H, i.e., o fato de $U_a \cap U_b = \emptyset$, e tal contradição veio do fato de X ser metrizável. Portanto, tal fato não pode ocorrer. ■

Exercício 1.4

Considere $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{S}$ uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo a seguinte propriedade: $U \in \mathcal{S}$ se, e somente se, $U \subset \mathbb{R}$ e, para cada $s \in U$ existe $t > s$ tal que a semirreta $[s,t)$ está contida em U. Mostre que $\mathcal{S}$ define uma topologia em $X = \mathbb{R}$. Além disso, mostre que em $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ os conjuntos $[s,t)$ sao abertos e fechados, e determine o fecho, em $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$, dos intervalos (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ e $[a,b]$.

Solução. Primeiro é importante observamos o que a condição de pertencer a $\mathcal{S}$ de fato está nos dizendo; note que esta é uma condição do tipo "fixado um ponto $s \in U$ obtemos o t correspondente", em outras palavras, fixado o s obtemos o intervalo correspondente. Agora, observe que $\emptyset \in \mathcal{S}$ segue por vacuidade, uma vez que não existe $s \in \emptyset$ para considerarmos; ainda, seja $s \in \mathbb{R}$ arbitrário e note que $t = s + 1 > s$ e $[s,t) \subset \mathbb{R}$, e pela arbitrariedade de s obtemos $\mathbb{R} \in \mathcal{S}$.

Seja $\{U_i\}_{i\in I}$ uma família arbitrária de elementos de $\mathcal{S}$, onde I é um conjunto de índices arbitrário. Devemos verificar que $\tau_{\mathcal{S}} =: \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{S}$. Considerando $s \in \tau_{\mathcal{S}}$, existe $i \in I$ tal que $s \in U_i \in \mathcal{S}$, donde existe $t > s$ tal que

$$[s,t) \subset U_i \subset \tau_{\mathcal{S}},$$

com a segunda inclusão acima ocorrendo pelo fato de que a união de conjuntos contém cada um de deus elementos. Logo, pela arbitrariedade de s, concluímos $\tau_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$.

Considere $U_1, U_2 \in \mathcal{S}$ e defina $\tau_{\mathcal{S}} = U_1 \cap U_2$. Tomando $s \in \tau_{\mathcal{S}}$ arbitrário, temos $s \in U_1 \in \mathcal{S}$ e $s \in U_2 \in \mathcal{S}$, donce segue que existem $t_1 > s$ e $t_2 > s$ tal que

$$[s,t_1) \subset U_1 \quad \text{e} \quad [s,t_2) \subset U_2.$$

Seja $t = \min\{t_1, t_2\}$ e note que

$$[s,t) \subset [s,t_1) \subset U_1 \quad \text{e} \quad [s,t) \subset [s,t_2) \subset U_2,$$

o que por sua vez implica em

$$[s,t) \subset U_1 \cap U_2 = \tau_{\mathcal{S}},$$

e, pela arbitrariedade de s, segue $\tau_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$, o que implica $\mathcal{S}$ define uma topologia em $\mathbb{R}$.

Observe que $[s,t)$ ser aberto segue pelo fato dos intervalos $[s,t)$ serem os abertos básicos da topologia $\mathcal{S}$. Por outro lado, para verificar que $[s,t)$ é fechado em $(\mathbb{R},\mathcal{S})$, devemos mostrar que o complementar $\mathbb{R}\setminus[s,t) = (-\infty,s)\cup[t,\infty)$ é aberto em $(\mathbb{R},\mathcal{S})$, isto é, que $\mathbb{R}\setminus[s,t)$ satisfaz a condição para pertencer a $\mathcal{S}$. Para $x \in \mathbb{R}\setminus[s,t)$ arbitrário, devemos verificar a existência de $\widetilde{t} > x$ tal que $[x,\widetilde{t}) \subset \mathbb{R}\setminus[s,t)$. Note que temos dois casos para considerar:

(C1) $x \in (-\infty, s)$: basta tomar $\widetilde{t} = s$, de tal modo que

$$[x,\widetilde{t}) \subset (-\infty,s) \subset \mathbb{R}\setminus[s,t);$$

(C2) $x \in [t,\infty)$: basta tomar $\widetilde{t} = x+1$, de tal modo que

$$[x,\widetilde{t}) \subset [t,\infty) \subset \mathbb{R}\setminus[s,t).$$

Logo, (C1) e (C2) nos garantem que $\mathbb{R}\setminus[s,t) \in \mathcal{S}$ e, portanto, $[s,t)$ é fechado.

Para calcular os fechos dos conjuntos com relação a $(\mathbb{R},\mathcal{S})$, recorde que $x \in \overline{Y}$ se, e somente se, todo aberto que contém x intersecta Y, i.e., para todo $U \ni x$, $U \cap Y \neq \emptyset$. Com a topologia em questão, temos que $x \in \overline{Y}$ se, e somente se, para todo $t > x$ tem-se $[x,t)\cap Y \neq \emptyset$. Logo, devemos analisar os seguintes casos

(i) $\overline{(a,b)} = [a,b)$: devemos analisar, de acordo com o critério acima, as possibilidades dos pontos. Se $x = a$, então para todo $t > a$ temos $[a,t)\cap(a,b) \neq \emptyset$ (basta analisar observar que todos os pontos de $(a,\min\{t,b\}) \in [a,t)\cap(a,b)$), donde $a = x \in \overline{(a,b)}$. Se $a < x < b$, então $x \in (a,b) \subseteq \overline{(a,b)}$, uma vez que o fecho de qualquer conjunto é o menor fechado que o contém. Se $x = b$, tome $t > b$, considere o aberto básico $[b,t)$ e note que $[b,t)\cap(a,b) = \emptyset$, donde segue $b \notin \overline{(a,b)}$. Se $x < a$, tome $x < t \leq a$ e note que $[x,t)$ só tem pontos estritamente menores que a, e assim $[x,t)\cap(a,b) = \emptyset$, obtendo $x \notin \overline{(a,b)}$. Por fim, se $x > b$ basta observar que qualquer intervalo $[x,t)$ somente possui pontos estritamente maiores que b, e assim $x \notin \overline{(a,b)}$. Portanto, diante dos cinco itens verificados, concluímos que $\overline{(a,b)} = [a,b)$.

(ii) $\overline{[a,b)} = [a,b)$: a justificativa para este caso reside no fato de que $[a,b)$ é fechado (segunda parte do exercício) e, portanto, seu fecho é ele mesmo.

(iii) $\overline{(a,b]} = [a,b]$: argumentos similares aos utilizados em (i). Se $x = a$, então $[a,t) \cap (a,b] \neq \emptyset$, e assim $a \in \overline{(a,b]}$. Se $a < x \leq b$, então $x \in (a,b] \subset \overline{(a,b]}$. Se $x > b$, então qualquer intervalo $[x,t)$ somente possui pontos estritamente maiores que b, donde $x \notin \overline{(a,b]}$. Por fim, se $x < a$ então $[x,t) \cap (a,b] = \emptyset$ e, portanto, $x \notin \overline{(a,b]}$. Pelos quatro itens verificados, concluímos o desejado.

(iv) $\overline{[a,b]} = [a,b]$: Neste caso, é suficiente verificar que $[a,b]$ é fechado em $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$. Observe que

$$\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty),$$

e ambos os conjuntos acima pertencem a $\mathcal{S}$. De fato, para $(-\infty, a)$ e $x < a$ tem-se $[x,a) \subset (-\infty, a)$. Para (b, ∞) e $x > b$, temos $[x,t) \subset (b, \infty)$ contendo pontos estritamente maiores que b. Portanto, ambos os conjuntos são abertos da topologia, o que nos garante $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ ser aberto. Logo, $[a,b]$ é fechado o que por sua vez nos garante $\overline{[a,b]} = [a,b]$.

Os itens (i)-(iv) concluem o exercício. ■

Observação 1

Dependendo da referência, a topologia acima recebe o nome de "lower limit topology" ou também "Sorgenfrey line in $\mathbb{R}$", e quando $\mathbb{R}$ está munido com tal topologia, denotamos por $\mathbb{R}_l$. Outro fato com relação a definição de topologia; há referências em que a condição com relação a interseção nos diz "A interseção de uma família finita de membros de τ pertence a τ". Entretanto, ao garantir a propriedade para dois elementos, o caso finito segue por indução. De fato, supondo que $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$, temos

$$U_1 \cap \cdots \cap U_n \cap U_{n+1} = (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap U_{n+1},$$

isto é, obtemos a interseção de dois elementos de τ.
Além disso, esse exercício nos mostra o quanto a topologia influencia na estrutura dos fechos em um conjunto. Quando consideramos $\mathbb{R}$ com a topologia usual, o fecho de todos os intervalos considerados acima coincidem e são iguais a $[a,b]$, enquanto que (pelo exercício feito) ao considerar a topologia $\mathcal{S}$ tal fato muda.

Exercício 1.5

Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Entao, os seguintes itens ocorrem:

(a) $\emptyset$ e X são fechados.

(b) A união finita de fechados é fechada.

(c) A interseção arbitrária de fechados é fechada.

Solução. **(a):** Basta observar que $\emptyset$ é o complementar de X, e que X por sua vez é o complementar de $\emptyset$, ambos elementos da topologia de X e, portanto, abertos. Tal fato nos garante que $\emptyset$ e X são fechados.

(b): Suponha que C_i são fechados para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, ou seja, cada $X - C_i$ é aberto. Pela Lei de DeMorgan, obtemos

$$X - \bigcup_{i=1}^{n} C_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X - C_i) \in \tau_X,$$

o que por sua vez nos garante que a união finita de fechados é fechada.

(c): Sejam $\{C_i\}_{i \in I}$ uma coleção arbitrária de fechados, isto é, $X - C_i$ é aberto por definição para todo $i \in I$. Novamente pela lei de DeMorgan, obtemos

$$X - \bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (X - C_i) \in \tau_X,$$

donde segue que interseção arbitrária de fechados é fechada. ■

Exercício 1.6

Seja X um conjunto e γ uma família de subconjuntos de X satisfazendo:

(a) $\emptyset, X \in \gamma$;

(b) a união finita de elementos de γ está em γ;

(c) a interseção arbitrária de elementos de γ está em γ.

Mostre que $\tau = \{X - V : V \in \gamma\}$ é uma topologia para X.

Solução. De início, observe que o fato de $\emptyset$ e X pertencerem a τ segue diretamente do item (a) atrelado a definição de topologia. Os demais fatos seguirão como aplicação das Leis de DeMorgan atreladas aos itens (b) e (c). De fato, considerando $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau$ uma coleção arbitrária, pela definiçao de τ obtemos

$$U_i = X - V_i, \ V_i \in \gamma$$

para todo $i \in I$. Pelas Leis de DeMorgan atreladas ao item (c), segue que

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (X - V_i) = X - \bigcap_{i \in I} V_i \in \tau.$$

Agora sejam $U_1, U_2 \in \tau$ tais que

$$U_1 = X - V_1 \quad \text{e} \quad U_2 = X - V_2,$$

com $V_1, V_2 \in \gamma$. Utilizando as Leis de DeMorgan mais uma vez, porém agora atreladas ao item (b), obtemos

$$U_1 \cap U_2 = (X - V_1) \cap (X - V_2) = X - (V_1 \cup V_2) \in \tau,$$

e assim obtemos que τ é uma topologia para X. ■

Exercício 1.7

Prove que em um espaço topológico com a topologia discreta todo subconjunto é simultaneamente aberto e fechado.

Solução. Ao considerar (X, τ_X) onde $\tau_X = \mathcal{P}(X)$, segue que todo subconjunto de X é aberto. Ainda, uma vez que $X - A \in \tau_X$ por ser subconjunto de X, então segue que A é fechado. ■

Exercício 1.8

Mostre que se um espaço possui apenas um número finito de pontos, cada um dos quais é fechado, então esse espaço possui a topologia discreta.

Solução. Considere (X, τ) um espaço topológico tal que $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, e note que $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ por vacuidade. Por outro lado, seja $A \in \mathcal{P}(X)$ arbitrário e note que

$$X - A = \bigcup_{x \in X - A} \{x\}$$

é finito, haja vista que $X - A \subset X$ possui no máximo n elementos. Ainda, pelo Exercício 1.5-(b) temos que $X - A$ é fechado, uma vez que cada $\{x\}$ é fechado.

Portanto, segue que $X - (X - A) = A$ é aberto por definição, donde segue que $\mathcal{P}(X) \subset \tau$ e assim concluímos que a topologia do espaço é a discreta. ■

Observação 2

Observe que a hipótese de X ser finito no Exercício 1.8 é essencial, caso contrário não seria possível utilizar o Exercício 1.5-(b) para concluir o desejado.

Exercício 1.9

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subseteq X$. Mostre as seguintes identidades:

(a) $X - \mathring{Y} = \overline{X - Y}$.

(b) $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$.

(c) $\partial Y = \emptyset$ se, e somente se, Y é simultaneamente aberto e fechado.

Solução. **(a)**: Pode ser verificado de dois modos, vejamos ambos. Primeiro, tomando $x \in X - \mathring{Y}$ implica $x \notin \mathring{Y}$, o que por sua vez garante que não existe V aberto tal que $x \in V \subseteq Y$. Seja $U \subset X$ um aberto arbitrário tal que $x \in U$ e, portanto, $U \subsetneq Y$ (pelo fato constatado anteriormente). Dessa forma, existe $y \in U \subset X$ tal que $y \notin Y$, donde $y \in X - Y$, ou seja, $y \in U \cap (X - Y)$ e assim

$$U \cap (X - Y) \neq \emptyset.$$

Sendo U um aberto arbitrário contendo x tal que $U \cap (X - Y) \neq \emptyset$, então $x \in \overline{X - Y} \subset X$.

Agora, seja $x \in \overline{X - Y} \subset X$ (onde a inclusão segue do fato de $X - Y$ ser subconjunto de X). Assim, nos resta provar que $x \notin \overset{\circ}{Y}$. Seja, pois, $V \subset X$ um aberto arbitrário com $x \in V$ e note que, sendo um aberto de X, $V \cap (X - Y) \neq \emptyset$, i.e., existe $y \in V \cap (X - Y)$, o que por sua vez implica $y \in V$ e $y \notin Y$, ou seja, $V \subsetneq Y$. Observe que mostramos a existência de um aberto arbitrário $V \ni x$ tal que $V \subsetneq Y$, o que nos garante $x \notin \overset{\circ}{Y}$.

Para o segundo modo de verificar tal prova, basta utilizar a definição de interior de um conjunto atrelado as Leis de DeMorgan.

(b): Considere $y \in \overline{Y}$ e observe que devemos considerar dois casos. Se $y \in Y$, não há o que provar e o resultado segue. Caso $y \notin Y$, então $y \in X - Y \subset \overline{X - Y}$ e, portanto,

$$y \in \overline{Y} \cap \overline{X - Y} = \partial Y.$$

Observe que a outra inclusão é imediata, uma vez que $Y \subseteq \overline{Y}$ e $\partial Y = \overline{Y} \cap \overline{X - Y} \subseteq \overline{Y}$.

(c): Primeiro, note que pelo item **(a)** atrelado a definição de fronteira de um conjunto, obtemos

$$\partial Y = \overline{Y} \cap \overline{X - Y} = \overline{Y} \cap (X - \overset{\circ}{Y}) = \overline{Y} - \overset{\circ}{Y},$$

isto é, a fronteira de um conjunto pode ser vista como o que resta de seu fecho após retirarmos o seu interior. Agora, suponha que $\partial Y = \emptyset$, o que implica em $\overline{Y} - \overset{\circ}{Y} = \emptyset$ (pelo fato acima), donde segue que $\overline{Y} \subset \overset{\circ}{Y}$. Logo, utilizando as definições de fecho e interior de um conjunto, obtemos

$$\overset{\circ}{Y} \subset Y \subset \overline{Y} \subset \overset{\circ}{Y},$$

o que nos garante $\overset{\circ}{Y} = Y = \overline{Y}$. A primeira igualdade nos diz que Y é aberto, enquanto a segunda nos fiz que Y é fechado.

Por outro lado, suponha que Y seja aberto e fechado em X. Por ser um conjunto aberto segue $Y = \overset{\circ}{Y}$, e por ser um conjunto fechado obtemos $Y = \overline{Y}$. Assim, utilizando o fato constatado no inicio deste item, obtemos

$$\partial Y = \overline{Y} - \overset{\circ}{Y} = Y - Y = \emptyset,$$

o que conclui o exercício. ■

Exercício 1.10

Seja (X, τ) um espaço topológico. Prove as sentenças a seguir:

(a) Se $U \in \mathcal{U}_x$ e $U \subset V \subset X$, então $V \in \mathcal{U}_x$.

(b) Se $U, V \in \mathcal{U}_x$ então $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.

(c) Dado $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{U}_x$, $V \subset U$, tal que $U \in \mathcal{U}_y$ para cada $y \in V$.

Solução. De início, recordemos o conceito de vizinhança (e conjunto de vizinhanças):

Definição 1. Seja (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Diremos que $U \subset X$ é uma vizinhança de x se $x \in \overset{\circ}{U}$, e denotamos por $\mathcal{U}_x$ o conjunto de vizinhanças de x.

Uma vez que

$$\mathring{U} = \bigcup \{V \subset X : \ V \text{ é aberto e } V \subset U\},$$

então a definição de vizinhança pode ser reescrita da seguinte forma: $U \subset X$ é uma vizinhança de x se existe um aberto $V \subset X$ tal que $x \in V \subset U$.

(a): Primeiro, observe que se $A \subset B$ então $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. De fato, como o interior de um conjunto é o maior aberto do espaço contido no próprio conjunto, então $\mathring{A} \subset A \subset B$ e $\mathring{B}$ é o maior aberto de X contido em B, e necessariamente devemos ter $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. Isso posto, basta observar que se $U \in \mathcal{U}_x$ e $U \subset V$ então $x \in \mathring{U} \subset \mathring{V}$ e, portanto, $V \in \mathcal{U}_x$.

(b): Aqui, observe que $\mathring{A} \cap \mathring{B} = (A \cap B)^{\circ}$ (tal propriedade pode ser verificada utilizando a definição de interior atrelada as Leis de DeMorgan). Com isso, se $U, V \in \mathcal{U}_x$ então

$$x \in \mathring{U} \cap \mathring{V} = (U \cap V)^{\circ},$$

o que nos garante $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.

(c): Dado $U \in \mathcal{U}_x$, basta considerar $V = \mathring{U}$ e observar que se $y \in V = \mathring{U}$ então $U \in \mathcal{U}_y$. ■

Para resolver o próximo exercício utilizaremos o seguinte resultado auxiliar, provado nas notas de aula.

Lema 2. *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases para as topologias τ e τ', respectivamente, sobre um mesmo conjunto X. São equivalentes:*

(a) $\tau \subset \tau'$

(b) *Para cada $x \in X$ e cada $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B$, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.*

Exercício 1.11

Considere as seguintes topologias sobre $\mathbb{R}$:

τ_1 = topologia usual;

τ_2 = K-topologia;

τ_3 = topologia do complemento finito;

τ_4 = topologia do limite superior, com elementos básicos da forma $(a, b]$;

τ_5 = topologia com elementos básicos $(-\infty, a)$.

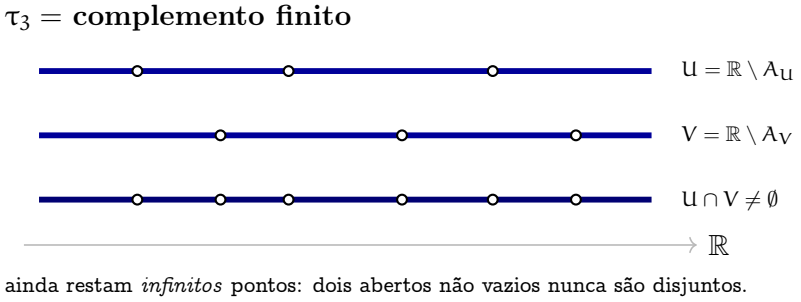
Determine, para cada uma dessas topologias, quais das outras ela contém.

Solução. Observe que $\tau_5 \subsetneq \tau_1$. Com efeito, $(-\infty, a)$ é aberto em τ_1, uma vez que dado $x < a$, tem-se $x \in (x-1, a) \subseteq (-\infty, a)$. Por outro lado, note que uniões de elementos da forma $\{(-\infty, a)\}$ são novamente semirretas da forma $(-\infty, s)$ ou $\mathbb{R}$ toda, de modo que

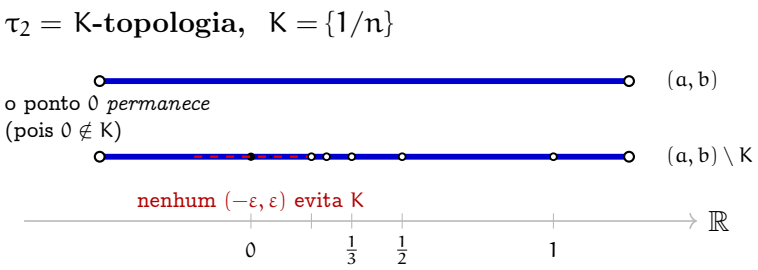
$$\tau_5 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\},$$

Como $(0, 1) \in \tau_1$ não tem essa forma, a inclusão é estrita.

Agora, note que $\tau_3 \subsetneq \tau_1$. Se $U \in \tau_3$ é não vazio, então obtemos a representação $U = \mathbb{R} \setminus A$ com A finito. Isso posto, dado $x \in U$ defina $\varepsilon = \min\{|x - y| : y \in A\} > 0$. Então $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$, e pela arbitrariedade de x segue que $U \in \tau_1$. Ainda, a inclusão é estrita, uma vez que $(0, 1) \in \tau_1$ é tal que $\mathbb{R} - (0, 1) = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ é infinito.



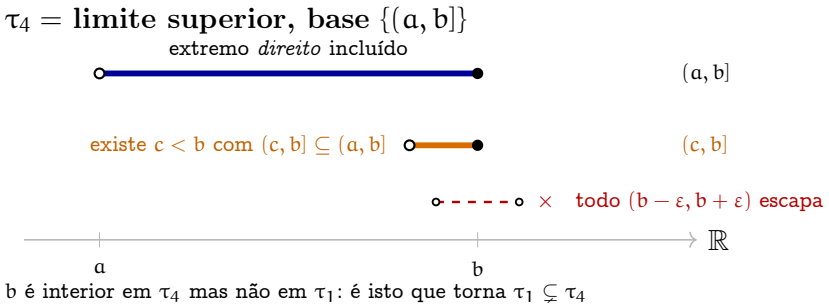
Observemos agora que $\tau_1 \subsetneq \tau_2$. Primeiro, note que todo elemento básico (a, b) de τ_1 é elemento básico de τ_2, donde segue que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Além disso, também temos que a inclusão é estrita, uma vez que $(-1, 1) \setminus K \in \tau_2$, mas não é aberto em τ_1, pois todo intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ contém pontos $1/n$ para n grande.



Também temos $\tau_1 \subsetneq \tau_4$. Com efeito, dado $x \in (a, b)$, tome c com $a < c < x$ e note que

$$x \in (c, x] \subseteq (a, b),$$

o que implica $\tau_1 \subseteq \tau_4$. A inclusão também é estrita, uma vez que $(0, 1] \in \tau_4$ não é aberto em τ_1.



Vejamos que $\tau_2 \subsetneq \tau_4$. Basta mostrar que cada elemento básico de τ_2 é aberto em τ_4. Note que o caso de (a, b) ser aberto em τ_4 segue pelo fato verificado logo acima. Para $(a, b) \setminus K$, seja $x \in (a, b)$ com $x \notin K$. Devemos exibir $c < x$ com $(c, x] \subseteq (a, b) \setminus K$, isto é,

$$(c, x] \subseteq (a, b) \quad \text{e} \quad (c, x] \cap K = \emptyset.$$

Devemos, então, considerar três casos:

(K1) $x \leq 0$: como $K \subseteq (0,1]$, qualquer c com $a < c < x$ serve, pois $(c,x] \subseteq (-\infty, 0]$ é tal que

$$(c,x] \cap K = \emptyset;$$

(K2) $x > 1$: considere $\max\{a,1\} < c < x$, e note que $(c,x] \subseteq (1,+\infty)$ é disjunto de K;

(K3) $0 < x \leq 1$ e $x \notin K$: então existe $n \geq 1$ com $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$. Neste caso, seja c satisfazendo $\max\{a, \frac{1}{n+1}\} < c < x$ e observe $(c,x] \subseteq \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, o qual é disjunto de K.

Por (K1)-(K3), concluímos que $\tau_2 \subseteq \tau_4$. Além disso, a inclusão é estrita pois $(0,1] \in \tau_4$, mas qualquer elemento básico de τ_2 que contenha 1 é da forma (a,b) ou $(a,b) \setminus K$ com $b > 1$, contendo portanto pontos maiores que 1, o que por sua vez implica $(0,1] \notin \tau_2$.

Note que $\tau_5 \subsetneq \tau_4$, uma vez que

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n \geq 1} \left(a - n,\ a - \tfrac{1}{n}\right],$$

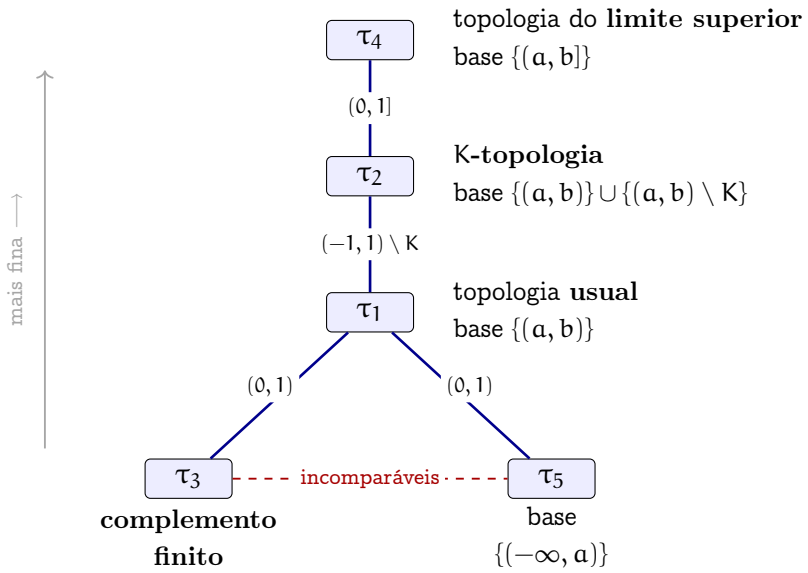
a qual sabemos ser válida pelo curso de Análise I (parte de topologia da reta). Também obtemos a inclusão estrita, pois $(0,1] \notin \tau_5$.

Por fim, τ_3 e τ_5 são incomparáveis, uma vez que $\mathbb{R} \setminus \{0\} \in \tau_3$ não é da forma $(-\infty, a)$, $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$. Logo, não é um elemento de τ_5 (veja o fato verificado no início do exercício). Ainda, $(-\infty, 0) \in \tau_5$ possui complementar $[0, +\infty)$ infinito e, portanto, não é um elemento de τ_3.

Para guardar: Vale a cadeia

$$\tau_3 \subsetneq \tau_1 \subsetneq \tau_2 \subsetneq \tau_4, \qquad \tau_5 \subsetneq \tau_1,$$

e todas as demais relações seguem por transitividade ($\tau_3, \tau_5 \subsetneq \tau_2$ e $\tau_3, \tau_5 \subsetneq \tau_4$), exceto τ_3 e τ_5, que são incomparáveis pelo fato verificado acima. Em particular, τ_4 é a mais fina de todas e nenhuma contém τ_4 propriamente.



O diagrama acima resume os fatos verificados neste exercício. ■

Para o próximo exercício, utilizaremos o seguinte resultado visto em aula (Lema 2.6).

Lema 3 (Lema 2.6, notas de aula). *Seja X um espaço topológico. Suponha $\mathcal{C}$ uma coleção de conjuntos abertos de X tal que para cada aberto U de X e cada $x \in U$, existe $C \in \mathcal{C}$ com $x \in C \subset U$. Então $\mathcal{C}$ é uma base para a topologia de X.*

Exercício 1.12

Aplique o Lema 3 para mostrar que a coleção enumerável

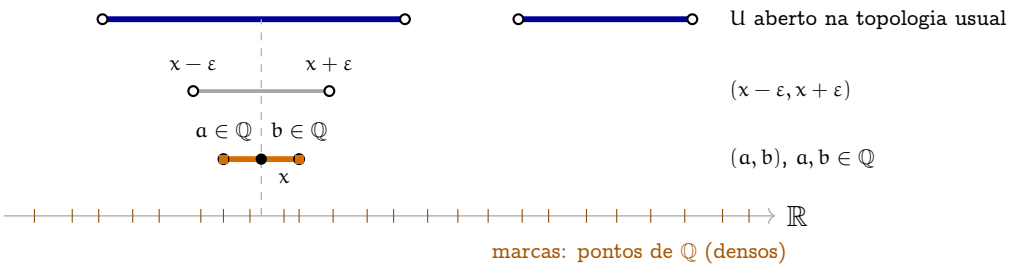
$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

é uma base que gera a topologia usual de $\mathbb{R}$.

Solução. Primeiro, observe que qualquer intervalo aberto é um aberto na topologia usual de $\mathbb{R}$. Agora, seja U um aberto na topologia usual de $\mathbb{R}$ e considere $x \in U$. Por definição, existe $\varepsilon > 0$ com $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$. Pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ (fato provado no curso de Análise I), tomando $a \in \mathbb{Q} \cap (x - \varepsilon, x)$ e $b \in \mathbb{Q} \cap (x, x + \varepsilon)$, obtemos $a < x < b$, $a, b \in \mathbb{Q}$ e

$$x \in (a, b) \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U.$$

Pelo Lema 3, $\mathcal{B}$ é base da topologia usual de $\mathbb{R}$.



Densidade de $\mathbb{Q}$: existem $a, b \in \mathbb{Q}$ com $x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$. Logo $x \in (a, b) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$.

■

Observação 3

O exercício anterior motiva o seguinte conceito: Sendo (X, τ) um espaço topológico, dizemos que (X, τ) satisfaz (1) o **primeiro axioma de enumerabilidade** se cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ que é enumerável; (2) o **segundo axioma de enumerabilidade** se existe uma base $\mathcal{B}$ para τ que é enumerável. Isso posto, observe que $\mathcal{B}$ do Exercício 1.12 é enumerável, pois está em bijeção com um subconjunto de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, o que implica $(\mathbb{R}, \tau_1)$ satisfazer o segundo axioma de enumerabilidade.

Para o próximo exercício, utilizaremos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 4 (Lema 2.5, notas de aula). *Seja X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma base para uma topologia τ sobre X. Então τ consiste da coleção de todas as uniões de elementos de $\mathcal{B}$.*

Exercício 1.13

Mostre que a coleção

$$\mathcal{C} = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

é uma base que gera uma topologia diferente da topologia do limite inferior sobre $\mathbb{R}$.

Solução. Ao contrário do que foi feito no Exercício 1.12, aqui devemos utilizar a definição de base. Observe que pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, atrelada ao fato de que $[a, b)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, dado $x \in \mathbb{R}$ basta escolher racionais $a < x < b$, tal que $x \in [a, b) \in \mathcal{C}$. Ainda, se $x \in [a, b) \cap [c, d)$ com todos os extremos racionais, então basta considerar

$$C = [\max\{a, c\},\ \min\{b, d\}) \in \mathcal{C}$$

e observar $x \in C \subset [a, b) \cap [c, d)$, com C não vazio pois contém x, e os extremos são racionais. Portanto, $\mathcal{C}$ é uma base para $\mathbb{R}$.

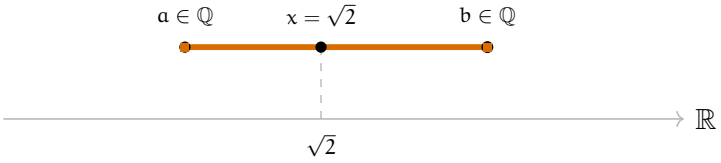
Considere $\tau_{\mathcal{C}}$ a topologia gerada por $\mathcal{C}$. Afirmamos que $\tau_{\mathcal{C}}$ é mais grossa que $\tau_{\mathbb{R}_\ell}$ (topologia do limite inferior). Note que cada elemento de $\mathcal{C}$ é um elemento de $\tau_{\mathbb{R}_\ell}$ pela definição desta topologia, e assim $\mathcal{C} \subset \tau_{\mathbb{R}_\ell}$. Sendo $\tau_{\mathbb{R}_\ell}$ uma topologia, toda união de elementos de $\mathcal{C}$ está em $\tau_{\mathbb{R}_\ell}$. Logo, pelo Lema 4 obtemos $\tau_{\mathcal{C}} \subset \tau_{\mathbb{R}_\ell}$.

Agora, considere $[\sqrt{2}, 3) \in \tau_{\mathbb{R}_\ell}$ e note que $[\sqrt{2}, 3) \notin \tau_{\mathcal{C}}$. De fato, caso contrário, existiria $[a, b) \in \tau_{\mathcal{C}}$ tal que

$$\sqrt{2} \in [a, b) \subseteq [\sqrt{2}, 3),$$

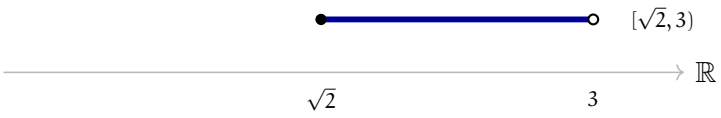
o que exige $a \leq \sqrt{2}$. Como $a \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, tem-se $a < \sqrt{2}$. Mas então $a \in [a, b)$ e $a < \sqrt{2}$, logo $a \notin [\sqrt{2}, 3)$, contradizendo $[a, b) \subseteq [\sqrt{2}, 3)$. Portanto $\tau_{\mathcal{C}} \subsetneq \tau_{\mathbb{R}_\ell}$.

Todo x está em algum $[a, b) \in \mathcal{C}$

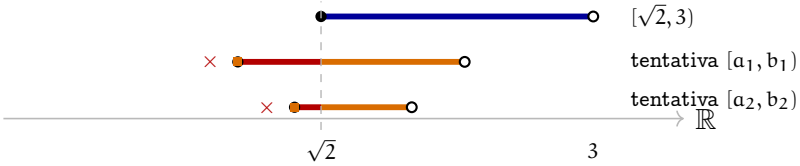


De $a < x$ segue $a \leq x$, logo $x \in [a, b)$. Mas x fica no *interior*, não no extremo esquerdo.

Em $\tau_{\mathbb{R}_\ell}$: $[\sqrt{2}, 3)$ é ele próprio básico



Em $\tau_{\mathcal{C}}$: todo $[a, b) \in \mathcal{C}$ com $\sqrt{2} \in [a, b)$ transborda



Como $a_i \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, nunca vale $a_i = \sqrt{2}$: força-se $a_i < \sqrt{2}$, e o trecho vermelho $[a_i, \sqrt{2})$ escapa de $[\sqrt{2}, 3)$. Aproximar a_i de $\sqrt{2}$ não adianta — o trecho vermelho encolhe mas nunca desaparece. Logo $[\sqrt{2}, 3) \notin \tau_{\mathcal{C}}$ e $\tau_{\mathcal{C}} \subsetneq \tau_{\mathbb{R}_\ell}$.

■

Exercício 1.14

Considere τ a topologia gerada pela base $\mathcal{B}$ (veja Definição 2.1 das notas de aula). Mostre que τ é, de fato, uma topologia.

Solução. De início, observe que o fato de $\emptyset$ e X pertencerem a τ seguem por vacuidade e pela definição de τ, respectivamente. Agora, seja $\{U_i\}_{i\in I}$ uma coleção arbitrária de elementos em τ e tome $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ arbitrário. Existe, pois, $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Como U_i é aberto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, o que nos garante que a união está contida em τ por definição.

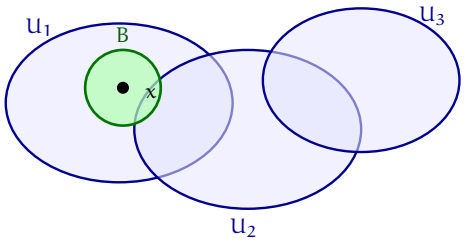
Agora, sejam U_1, U_2 elementos de τ e considere $x \in U_1 \cap U_2$. Por definição de τ, sejam $B_1 \subset U_1$ e $B_2 \subset U_2$ tais que

$$x \in B_1 \subset U_1 \quad \text{e} \quad x \in B_2 \subset U_2.$$

Ainda, uma vez que $\mathcal{B}$ é uma base, podemos encontrar B_3 tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Dessa forma, $x \in B_3$ e $B_3 \subset U_1 \cap U_2$, donde segue que $U_1 \cap U_2 \in \tau$ por definição.

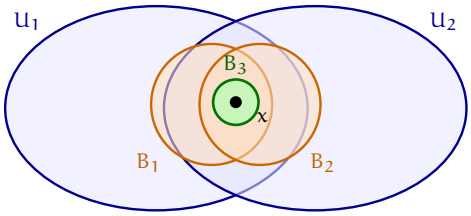
Logo, τ é uma topologia para X.

união arbitrária



$x \in \bigcup_i U_i \Rightarrow x \in U_i$ para algum i
$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ com $x \in B \subset U_i \subset \bigcup_i U_i$

interseção de dois



$x \in B_1 \subset U_1$ e $x \in B_2 \subset U_2$;
a condição (ii) de base dá B_3 com $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$

■

A partir deste momento, propriedades envolvendo imagem direta e inversa de uniões e interseções de conjuntos serão de grande importância. Em razão disso, recordemos na observação abaixo as principais propriedades.

Observação 4

Sejam X e Y conjuntos e considere uma função $f\colon X \to Y$. Recorde que se $A \subset X$ e $B \subset Y$, então definimos

(i) Imagem de A por f como $f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}$.

(ii) Imagem inversa de B por f como $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

É importante observar que a imagem inversa (ou pré-imagem) $f^{-1}(B)$ sempre existe, mesmo que f não possua inversa, o que nos leva ao fato de que $f^{-1}(B)$ representa imagem inversa de B e não a imagem de B pela inversa de f, sendo tal comentário importante uma vez que as

igualdades a seguir nem sempre valem

$$f^{-1}(f(A)) = A \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(B)) = B.$$

Agora, considere $A, A_i \subset X$, $i \in I$, e $B, B_i \subset Y$, $i \in I$. Então valem as seguintes relações:

(R1) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

(R2) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

(R3) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$.

(R4) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

(R5) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, com igualdade se f injetiva.

(R6) $f(X - A) \subset Y - f(A)$, com igualdade se f injetiva.

(R7) $f(X - A) \supset Y - f(A)$, com igualdade se f sobrejetiva.

(R8) $A \subset f^{-1}(f(A))$, com igualdade se f injetiva.

(R9) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, com igualdade se f sobrejetiva.

Exercício 1.15

Sejam X um conjunto arbitrário e τ_1, τ_2 duas topologias sobre X. Prove que a função identidade $\mathrm{Id}\colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ é contínua se, e somente se, $\tau_2 \subset \tau_1$.

Solução. Considere $X_1 = (X, \tau_1)$, $X_2 = (X, \tau_2)$ e recorde que por $f\colon X_1 \to X_2$ ser identidade então temos $f^{-1}(V) = V$, para qualquer $V \subset X_2$. Isso posto, suponha que f seja contínua e considere $U \in \tau_2$. Assim, $U = f^{-1}(U)$ é aberto em X_1 pelo fato de f ser contínua e, portanto, $U \in \tau_1$ o que nos garante $\tau_2 \subset \tau_1$.

Por outro lado, supondo que $\tau_2 \subset \tau_1$, obtemos que $U \in \tau_2$ implica $U \in \tau_1$. Portanto, considerando $U \in \tau_2$ arbitrário e usando que f é a identidade, temos que $f^{-1}(U) = U \in \tau_1$, donde segue que f é contínua. ■

Observação 5

O exercício anterior nos motiva a definir o conceito de uma topologia ser mais fina que outra. Sendo τ_1, τ_2 topologias para um espaço X, se $\tau_2 \subset \tau_1$ então dizemos que a topologia τ_1 é mais fina que τ_2, isto é, que τ_1 possui mais abertos que τ_2.

Exercício 1.16

Seja X um espaço com a seguinte propriedade: para todo espaço topológico Y e toda função $f\colon X \to Y$, f é contínua. Prove que X possui a topologia discreta. (Dica: Seja Y o espaço X com a topologia discreta).

Solução. Considere $f\colon (X,\tau) \to (X,\mathcal{P}(X))$ sendo a aplicação identidade, com tal consideração possível em razão da dica e pelo fato da propriedade do exercício ser valida para qualquer função f. Com isso, o exercício se resume a verificar que $\mathcal{P}(X) \subset \tau$, haja vista que a inclusão contrária sempre ocorre (pela definição de topologia e do conjunto $\mathcal{P}(X)$).

Entretanto, observe que sendo f a aplicação identidade e contínua, pelo exercício anterior obtemos que $\mathcal{P}(X) \subset \tau$, o que conclui o exercício. ■

Exercício 1.17

Seja Y um espaço com a seguinte propriedade: para todo espaço topológico X e toda função $f\colon X \to Y$, f é contínua. Prove que Y possui a topologia concreta. (Dica: Seja X o espaço Y com a topologia concreta).

Solução. A ideia é utilizar os mesmos argumentos do exercício anterior. Considere a aplicação $f\colon (Y,\{\emptyset,Y\}) \to (Y,\tau_Y)$ como a identidade, a qual podemos supor contínua pela hipótese. Note que pelo Exercício 1.15, obtemos $\tau_Y \subset \{\emptyset,Y\}$. A inclusão contrária segue pela definição de topologia, o que nos permite inferir que $\tau_Y = \{\emptyset,Y\}$. ■

Exercício 1.18

Seja $X = (\mathbb{R},\mathcal{U})$, onde

$$\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty,x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Prove que uma função $f\colon X \to X$ é contínua se, e somente se, f é não-decrescente e contínua à direita no sentido clássico.

Solução. Inicialmente, observe que pela definição de continuidade, atrelada a de imagem inversa, é suficiente analisarmos o que acontece com

$$f^{-1}((-\infty,x)) = \{y \in X : f(y) \in (-\infty,x)\} = \{x \in X : f(y) < x\},$$

uma vez que $f^{-1}(\{\emptyset\}) = \emptyset$ e $f^{-1}(\{\mathbb{R}\}) = \mathbb{R}$ pertencem a $\mathcal{U}$. Seja $U_x = f^{-1}((-\infty,x))$, $x \in \mathbb{R}$.

Suponha que f seja contínua, isto é, $U_x \in \mathcal{U}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para o caso de f ser não-decrescente, suponha que tal fato não ocorre, ou seja, existem $y_1 < y_2$ satisfazendo $f(y_1) > f(y_2)$. Considere $x = f(y_1)$ e note que $f(y_2) < x$, o que implica $y_2 \in U_x$, e $f(y_1) = x$, o que por sua vez implica $y_1 \notin U_x$. Além disso, observe que para qualquer subconjunto V de $\mathcal{U}$ devemos ter:

(i) se $y \in V$ e $z < y$ então $z \in V$;

(ii) para todo $y \in V$ existe $\delta > 0$ de modo que $[y, y+\delta) \subset V$;

com a volta também sendo verdade, ou seja, temos uma condição necessária e suficiente para que um subconjunto da reta pertença a $\mathcal{U}$ (Provar este fato é necessário, e para tal é suficiente que vocês utilizem a definição dos conjuntos em questão, atreladas a fatos estudados e provados no curso de Análise I sobre "Topologia de $\mathbb{R}$").

Dessa forma, pela hipótese, devemos ter U_x satisfazendo (i)-(ii). Uma vez que $y_1 < y_2$ e $y_2 \in U_x$, a condição (i) implica que necessariamente devemos ter $y_1 \in U_x$, o que sabemos ser uma contradição. Assim, devemos ter f não-decrescente.

Para provar que f é contínua à direita, seja $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e considere $x = f(x_0) + \varepsilon$. Note que U_x é não-vazio, haja vista que $f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon = x$. Como U_x satisfaz (ii), existe $\delta > 0$ tal que $[x_0, x_0 + \delta) \subset U_x$. Agora, seja $y \in [x_0, x_0 + \delta)$ e note que pelo fato de $y \in U_x$ obtemos

$$f(y) < x = f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow f(y) - f(x_0) < \varepsilon.$$

Além disso, se $y = x_0$ então $f(y) - f(x_0) = 0$, e caso $y > x_0$ então pelo fato de f ser não-decrescente, obtemos $f(y) \geq f(x_0)$. Logo, $f(y) - f(x_0) \geq 0$ e assim

$$|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de x_0, segue que f é contínua à direita.

Agora, suponha que f seja não-decrescente e contínua à direita e fixe $x \in \mathbb{R}$ com U_x definido como anteriormente. Note que para mostrar que f é contínua, é suficiente que verifiquemos as condições (i)-(ii) para U_x. Com efeito, para $z \in U_x$ e $y < z$, obtemos $f(y) \leq f(z)$. Como $z \in U_x$ nos garante (por definição) que $f(z) < x$, segue que

$$f(y) \leq f(z) < x,$$

e assim, $y \in U_x$. Isso prova o item (i) para U_x.

Ademais, seja $y \in U_x$, i.e., $f(y) < x$, e defina $\varepsilon = x - f(y) > 0$. Como f é contínua à direita, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $z \in [y, y + \delta)$ obtemos $|f(z) - f(y)| < \varepsilon$, donde segue que

$$f(z) - f(y) \leq |f(z) - f(y)| < \varepsilon = x - f(y),$$

o que por sua vez implica em $f(z) < x$ e, portanto, $[y, y + \delta) \subset U_x$. Assim, a condição (ii) de fato ocorre para U_x. Sendo (i)-(ii) verdade, segue que f é contínua. ■

Exercício 1.19

Uma funçao $f\colon X \to Y$ entre espaços topológicos X e Y é contínua se, e somente se, $f^{-1}(C)$ é fechado em X para todo C fechado em Y.

Solução. Suponha que f seja contínua e considere $C \subset Y$ fechado, ou seja, $Y - C$ é aberto. Pela continuidade de f, $X - f^{-1}(C) = f^{-1}(Y - C)$ é aberto em X e, portanto, $f^{-1}(C)$ é fechado em X.

Agora, considere U um aberto arbitrário de Y ($Y - U$ é fechado) e note que $f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U)$ é um fechado em X por hipótese. Logo, $X - (X - f^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$ é aberto em X o que implica em f ser contínua. ■

Exercício 1.20

Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são aplicações contínuas entre espaços topológicos, mostre que a composta $g \circ f\colon X \to Z$ é uma aplicação contínua.

Solução. Seja U um aberto em Z. Para verificar que $g \circ f\colon X \to Z$ é uma aplicação contínua, devemos mostrar que $(g \circ f)^{-1}(U)$ é aberto em X. De fato, note que $g^{-1}(U)$ é um aberto em Y, uma vez que g é contínua, o que por sua vez implica em $f^{-1}(g^{-1}(U))$ ser aberto em X, pelo fato de f ser contínua. Por fim,

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1} \circ g^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

nos garante que $g \circ f$ é contínua. ■

Exercício 1.21

Dê exemplos de espaços topológicos X e Y e de uma bijeção contínua $f\colon X \to Y$ cuja função inversa não seja contínua.

Solução. Considere $X = (\mathbb{R}, \mathcal{S})$, onde $\mathcal{S}$ é a topologia definida no Exercício 1.4, e $Y = (\mathbb{R}, \tau_Y)$, onde τ_Y representa a topologia usual de $\mathbb{R}$, e considere $f\colon X \to Y$ a aplicação identidade. Sabemos que f é uma bijeção, mas sua inversa não é contínua uma vez que $[0,1) \in \mathcal{S}$ não é aberto em τ_Y.

Outro exemplo mais comum, é considerar a aplicação que mapeia um intervalo na S^1, i.e., considere $\varphi\colon [0, 2\pi) \to S^1$ definida por $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$, onde $X = [0, 2\pi)$ e $Y = S^1$ estão com as topologias usuais de seus respectivos espaços. Note que φ está bem definida, uma vez que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ implica $\varphi(t) \in S^1$. O fato de φ ser contínua segue pelo fato de cada uma de suas componentes ser contínua (também podemos verificar a continuidade com a topologia do subespaço, matéria da P2).

A sobrejetividade segue pelo fato de $\varphi([0, 2\pi)) = S^1$ (onde o fato de 0 pertencer ao domínio é essencial). De fato, tome $(x, y) \in S^1$ arbitrário e note que $x^2 + y^2 = 1$ implica $x^2 \leq 1 - y^2 \leq 1$, donde segue que $|x| \leq 1$, i.e., $x \in [-1, 1]$. Ainda, sabemos que $\cos|_{[0,\pi]}\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ é uma bijeção, ou seja, existe um único $t \in [0, \pi]$ tal que $\cos t = x$. Pela identidade fundamental, atrelada ao fato de $\sin\theta > 0$ para $\theta \in (0, \pi)$ e $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$, obtemos $\sin t = |y|$ para $t \in [0, \pi]$, ou seja, $\varphi(t) = (x, |y|)$. Para verificar que $|y| = y$, basta observar que: (1) se $y \geq 0$ tem-se $\varphi(t) = (x, y)$, $t \in [0, \pi] \subset [0, 2\pi)$; (2) se $y < 0$, então ao considerar $s \in (0, \pi)$ com $t = 2\pi - s$, atrelado ao fato de $\cos(2\pi - s) = \cos(s)$ e $\sin(2\pi - s) = -\sin(s)$, obtemos $\varphi(t) = (x, y)$ e, portanto, φ é sobrejetora.

Para verificar a injetividade, suponha $\cos s_1 = \cos s_2$ e $\sin s_1 = \sin s_2$, com $s_1, s_2 \in [0, 2\pi)$, e observe que isso implica em $s_1 = s_2$ (use que $\sin(t) > 0$ em $(0, \pi)$, $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$, e para $t \in (\pi, 2\pi)$, com $t = 2\pi - s$ e $s \in (0, \pi)$, tem-se $\sin(t) > 0$ implica $t \in (0, \pi)$, $\sin(t) < 0$ implica $t \in (\pi, 2\pi)$ e $\sin(t) = 0$ implica $t \in \{0, \pi\}$). Por fim, o fato da inversa não ser contínua, basta observar que se $U = [0, \pi)$ é um aberto em X, e que $\varphi(U)$ é o semi-círculo superior de S^1 unido com $p = (1, 0)$, i.e, $\varphi(U) = S^1_+ \cup \{p\}$, de modo que qualquer aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo p também contem pontos de S^1_- (parte inferior de S^1), onde

$$S^1_+ = \{(x, y) \in S^1 : y \geq 0\} \quad \text{e} \quad S^1_- = \{(x, y) \in S^1 : y \leq 0\}.$$

Outro modo de verificar que a inversa (neste caso representada por φ^{-1}) não é contínua, é utilizar o critério sequencial. Aqui, é suficiente considerar a sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $t_n = 2\pi - \frac{1}{n}$, e verificar que apesar de $\varphi(t_n) \to \varphi(0)$ em S^1 temos $\varphi^{-1}(t_n) \nrightarrow \varphi^{-1}((1,0))$. Veja a Figura 1.1 para uma representação da prova. ■

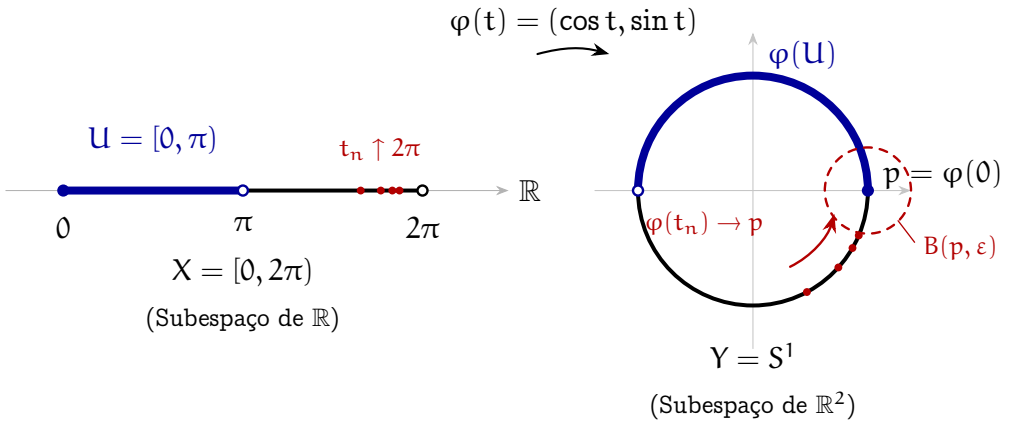


Figura 1.1: Aplicação $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ é uma bijeção contínua $[0, 2\pi) \to S^1$ cuja inversa é não contínua: $U = [0, \pi)$ é aberto em X, mas qualquer bola $B(p, \varepsilon)$ intersecta a parte inferior do semi-círculo, então $\varphi(U)$ não é aberto em S^1. Equivalentemente, $t_n \uparrow 2\pi$ se afasta de 0 enquanto $\varphi(t_n) \to p = \varphi(0)$.

Exercício 1.22

Sejam X e Y espaços topológicos. Prove que X e Y são homeomorfos se, e somente se, existe uma função $f\colon X \to Y$ tal que (i) f é bijetiva e (ii) um subconjunto U de X é aberto se, e somente se, $f(U)$ é aberto em Y.

Solução. Como $X \simeq Y$, existe um homeomorfismo $f\colon X \to Y$, ou seja, f é uma bijeção contínua com inversa $g\colon Y \to X$ contínua. Sendo g contínua, segue que

$$g^{-1}(U) \in \tau_Y, \text{ para todo } U \in \tau_X. \tag{1.1}$$

Afirmação: $g^{-1}(U) = f(U)$, para qualquer bijeção f.

De fato, se $y \in g^{-1}(U)$ então $g(y) \in U$ e assim $y = f \circ g(y) \in f(U)$. Por outro lado, se $y \in f(U) \subset f(X) = Y$, temos $y = f(x)$ com $x \in U$, donde segue que $g(y) = g \circ f(x) = x \in U$, o que implica em $y \in g^{-1}(U)$ por definição. Logo, temos a validade da Afirmação.

Pela equação (1.1) atrelada a Afirmação provada, obtemos $f(U) \in \tau_Y$.

Agora, suponha que $f(U) \in \tau_Y$ com $U \subset X$ arbitrário. Sendo f contínua e injetiva, ao usar a condição (R8), obtemos $U = f^{-1}(f(U)) \in \tau_X$. Isso conclui a primeira parte do exercício.

Suponha que f seja uma bijeção tal que a condição (ii) seja verdade. Assim, para concluir que f é um homeomorfismo, é suficiente verificar (neste caso) que f é contínua com inversa g contínua. Considere $V \in \tau_Y$ arbitrário e observe que pelo fato de f ser sobrejetiva, obtemos pela Propriedade (R9) que $f(f^{-1}(V)) = V \in \tau_Y$. Pela hipótese (ii), segue que $f^{-1}(V) \in \tau_X$ e, portanto, f é contínua.

Ademais, seja $U \in \tau_X$ arbitrário e note que $f(U) \in \tau_Y$ pela hipótese (ii). Pelo fato da Afirmação provada no início ser valida para qualquer bijeção, obtemos $g^{-1}(U) = f(U) \in \tau_Y$, o que nos garante que g é contínua e, portanto, que f é um homeomorfismo. ■

Exercício 1.23

Seja X um espaço topológico, denote por $G(X)$ o conjunto dos homeomorfismos $f\colon X \to X$ e dado $x \in X$ considere $G_x(X) = \{f \in G(X) : f(x) = x\}$. Mostre que:

(a) $G(X)$ munido da operação de composição de funções é um grupo.

(b) $G_x(X)$ é um subgrupo de $G(X)$.

Solução. (a): Observe que a composição sempre vai estar bem definida, uma vez que domínio e contradomínio são sempre iguais (neste exercício). Ainda, note que $G(X)$ é fechado com relação a composição de funções uma vez que composição de bijeção é uma bijeção, composição de funções contínuas é uma função contínua e vale $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, para qualquer $f, g \in G(X)$.

Agora, sejam $f, g, h \in G(x)$ e $x \in X$ e note que

$$\begin{cases} ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g) \circ (h(x)) = f(g(h(x))) \\ (f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))), \end{cases}$$

o que garante a associatividade de $\circ$. Com relação ao elemento neutro, basta observar que

$$f \circ id_X = f = id_X \circ f.$$

Por fim, para o elemento inverso, observe que se $f \in G(X)$ então existe a inversa f^{-1} a qual é contínua por definição de homeomorfismo, e também uma bijeção. Além disso, como $(f^{-1})^{-1} = f$, segue que a inversa de f^{-1} é contínua e, portanto, $f^{-1} \in G(X)$. Logo,

$$f \circ f^{-1} = id_X = f^{-1} \circ id_x,$$

o que nos garante $(G(X), \circ)$ é um grupo.

(b): De inicio, por definição, temos $G_x(X) \subset G(X)$ e $id_x \in G_x(X)$. Agora, sejam $f, g \in G_x(X)$ e observe que $f \circ g \in G(X)$ e vale

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = x,$$

donde segue que $f \circ g \in G_x(X)$. Além disso, também sabemos pelo item anterior que $f^{-1} \in G(X)$. Como $f(x) = x$, obtemos

$$x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x)$$

e, portanto, $f^{-1} \in G_x(X)$. Isso nos garante que $G_x(X)$ é subgrupo de $G(X)$. ■

1.2 Extras P1

Exercício 1.24

Dê um exemplo de uma família de subconjuntos que não formam uma topologia.

Solução. Considere $X = \{1, 2, 3\}$ e $\tau = \{X, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$. Para verificar que τ não forma uma topologia em X, é suficiente observar que $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \tau$. ■

Exercício 1.25

(Continuação do Exercício 1.9) Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$. Então Y é fechado se, e somente se, $Y = \overline{Y}$. Além disso, verifique que se $Y \subset F \subset X$ e F é fechado, então $\overline{Y} \subset F$.

Solução. Por definição de fecho, sabemos que este é o menor fechado que contém o conjunto em questão, isto é, $Y \subset \overline{Y}$, independente de Y ser fechado ou não. Ainda, sendo Y fechado e $Y \subseteq Y$, entao novamente pela definição de fecho, i.e.,

$$\overline{Y} = \bigcup_{C \in \mathcal{F}} C, \quad \text{onde} \quad \mathcal{F} = \{C \subset X : \ C \text{ fechado}, Y \subset C\},$$

obtemos, tomando $C = Y$, que $\overline{Y} \subset Y$.

Por outro lado, supondo que $\overline{Y} = Y$, segue que Y é fechado.

Agora, suponha $Y \subset F \subset X$ e F é fechado, ou seja, F é exatamente um dos conjuntos da coleção que define o fecho. Uma vez que a interseção de conjuntos está sempre contida nos elementos desta, se $y \in \overline{Y}$ então $y \in C$ para todo $C \in \mathcal{F}$, em particular, para $C = F$, temos $y \in F$. Pela arbitrariedade de y, concluímos que $\overline{Y} \subset F$. ■

Exercício 1.26

Sejam τ_λ, $\lambda \in \Lambda$, topologias em X.

(a) Mostre que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ define uma topologia em X.

(b) Pode-se dizer o mesmo de $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$?

Solução. **(a)**: Uma vez que τ_λ são topologias em X, então para todo $\lambda \in \Lambda$ temos $X, \emptyset \in \tau_\lambda$. Agora, seja $(U_i)_{i \in I}$ uma família arbitrária em $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ e note que para cada $i \in I$, tem-se

$$U_i \in \tau_\lambda \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda.$$

Assim, como τ_λ define uma topologia, obtemos

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_\lambda \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda$$

e, portanto,

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda \right).$$

De forma similar, verifica-se a propriedade para uma interseção finita de elementos.

(b): Não se pode garantir que tal conjunto é uma topologia em X. Com efeito, tome $X = \{1, 2, 3\}$ e considere as topologias

$$\tau_1 = \{X, \{1\}, \emptyset\},\ \tau_2 = \{X, \{2\}, \emptyset\} \text{ e } \tau_3 = \{X, \{3\}, \emptyset\}.$$

Dessa forma, se consideramos $U_1 = \{1\}$, $U_2 = \{2\}$ e $U_3 = \emptyset$, temos que

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{1, 2\} \notin \tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3.$$

■

Exercício 1.27

De um exemplo que mostre $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Solução. Sejam $A = (1, 2)$ e $B = (2, 3)$. Entao, tem-se

$$\overline{A \cap B} = \emptyset \quad \text{e} \quad \overline{A} \cap \overline{B} = \{2\}$$

e o exercício segue. ■

Recordemos o conceito de base de vizinhanças.

Definição 5. Seja (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Diz-se que uma família $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x$ é uma base de vizinhanças de x se para todo $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$.

Exercício 1.28

Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x, para cada $x \in X$. Então:

(a) Dados $U, V \in \mathcal{B}_x$, existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset (U \cap V)$.

(b) Dado $U \in \mathcal{B}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$, $V \subset U$, tal que para cada $y \in V$ existe $W \in \mathcal{B}_y$ tal que $W \subset U$.

Solução. Basta aplicar argumentos similares ao Exercício 1.10. ■

Exercício 1.29

Sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ funções contínuas entre espaços topológicos. Mostre que se $g \circ f$ é um homeomorfismo e g injetora (ou f sobrejetora), então f e g são homeomorfismos.

Solução. Vejamos que f é um homeomorfismo. Considere $x, y \in X$ tais que $f(x) = f(y)$ e note que pelo fato de $g \circ f$ ser homeomorfismo, em particular injetor, $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ implica $x = y$, ou

seja, f é injetora. Ademais, sendo $g \circ f$ homeomorfismo, em particular é sobrejetor, ou seja, para todo $z \in Z$ existe $x \in X$ tal que $g \circ f(x) = z$.

Seja $y \in Y$ arbitrário e note que por definição temos $g(y) \in Z$. Assim, utilizando a sobrejetividade de $g \circ f$, existe $x \in X$ tal que $(g \circ f)(x) = g(y)$ donde, pelo fato de g ser injetora, segue que $f(x) = y$. Portanto, segue que f é sobrejetora, e assim obtemos que f é uma bijeção contínua. Agora, note que f^{-1} é contínua como composição de aplicações contínuas, uma vez que

$$f^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g = (g \circ f)^{-1} \circ g,$$

e assim segue que f é um homeomorfismo.

Agora, note que g é sobrejetora. De fato, tome $z \in Z$ arbitrário e note que pelo fato de $g \circ f$ ser homeomorfismo (utilizando o mesmo argumento de antes), existe $x \in X$ tal que $g \circ f(x) = z$, com $f(x) \in Y$. Ou seja, verificamos que dado $z \in Z$, existe $y = f(x) \in Y$ tal que $g(y) = z$, donde segue que g é sobrejetora. Assim, g é uma bijeção contínua, cuja inversa também é uma aplicação contínua, haja vista que

$$g^{-1} = f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = f \circ (g \circ f)^{-1}.$$

Portanto, concluímos que g é um homeomorfismo. ■

Exercício 1.30

Sejam (X, τ) um espaço topológico, $Y \neq \emptyset$ um conjunto qualquer com η, σ topologias em Y tal que η é definida pela métrica d_η em Y e σ definida pela métrica d_σ em Y. Considere uma métrica d_Y em Y equivalente a d_σ tal que $d_\eta(x, y) = \max\{d_\sigma(x, y), d_Y(x, y)\}$, para todo $(x, y) \in Y \times Y$. Se $f\colon (X, \tau) \to (Y, \tau_\eta)$ e $g\colon (Y, \tau_\eta) \to (Y, \tau_\sigma)$ sao aplicaçoes tais que $f(X) = Y$, f é contínua e para todo $U \in \tau_\sigma$ tem-se $g^{-1}(U) \in \tau_\sigma$, mostre que

(a) $g \circ f$ é contínua;

(b) para todo $O \subset X$ tem-se $g \circ f(\overline{O}) \subset \overline{g \circ f(O)}$.

Solução. (a): Note que d_η e d_σ são métricas equivalentes em Y. De fato, sendo d_Y e d_σ equivalentes em Y, existem constantes $c_Y, c_\sigma \geq 0$ tais que

$$c_Y d_\sigma(x, y) \leq d_Y(x, y) \leq c_\sigma d_\sigma(x, y),$$

donde segue que

$$d_\eta(x, y) = \max\{d_\sigma(x, y), d_Y(x, y)\} \geq d_Y(x, y) \geq c_Y d_\sigma(x, y). \tag{1.2}$$

Da mesma forma, obtemos

$$d_\eta(x, y) \leq d_\sigma(x, y) + d_Y(x, y) \leq d_\sigma(x, y) + c_\sigma d_\sigma(x, y). \tag{1.3}$$

Por (1.2) e (1.3),

$$c_Y d_\sigma(x, y) \leq d_\eta(x, y) \leq (1 + c_\sigma) d_\sigma(x, y),$$

ou seja, d_η e d_σ são métricas equivalentes em Y, o que por sua vez nos garante que $\tau_\eta = \tau_\sigma$.

Dessa forma, temos que g é uma função contínua, uma vez que por hipótese obtemos que $U \in \tau_\sigma$ implica $g^{-1}(U) \in \tau_\sigma = \tau_\eta$. Sendo f contínua, segue que $g \circ f\colon (X, \tau) \to (Y, \tau_\eta)$ é contínua.

(b): Seja $y \in g \circ f(\overline{O}) = \{g \circ f(x) \in (Y, \tau_\eta) : x \in \overline{O}\}$. Assim, existe $x \in \overline{O}$ tal que $g \circ f(x) = y$. Por definição de fecho, para qualquer vizinhança U de x, obtemos $O \cap U \neq \emptyset$. Logo,

$$g \circ f(O \cap U) \neq \emptyset.$$

Como $g \circ f(O \cap U) \subset (g \circ f)(O) \cap (g \circ f)(U)$, segue que

$$(g \circ f)(O) \cap (g \circ f)(U) \neq \emptyset,$$

com $(g \circ f)(U)$ uma vizinhança de y. Portanto, $y \in \overline{g \circ f(O)}$. ■

2. Exercícios para P2

2.1 Topologia induzida, quociente e produto

Exercício 2.1

Seja (X, τ) um espaço topológico e $S \subseteq X$. Então a família

$$\tau_S = \{S \cap U : U \in \tau\}$$

define uma topologia para S, a qual é conhecida por Topologia Induzida. Quando consideramos (S, τ_S), dizemos que S é subespaço de X.

Solução. O fato de $S, \emptyset \in \tau_S$ é facilmente verificado. Considere $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma coleção arbitrária de elementos em τ_S, e note que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $U_\lambda \in \tau$ tal que $A_\lambda = S \cap U_\lambda$, donde

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S \cap U_\lambda = \left(S \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) \in \tau,$$

uma vez que τ é uma topologia. De forma similar, se mostra para uma interseção finita de elementos de τ_S, o que nos garante que τ_S define uma topologia para S. ■

Observação 1

O exercício anterior é de grande importância, pois nos fornece uma caracterização para abertos de um subconjunto do espaço topológico. Para guardar:

"Os abertos de S são os abertos de X intersectados com S."

Exercício 2.2

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $S \subset X$ subespaço. Mostre que:

(a) Se S é aberto em X, então os abertos de S na topologia induzida são abertos em X.

(b) Se S é fechado em X, então os fechados de S na topologia induzida são fechados em X.

Solução. (a): Suponha S aberto em X, i.e., $S \in \tau$, e tome $V \in \tau_S$, ou seja, $V = S \cap U$, com $U \in \tau$. Como X é fechado para união arbitrária de elementos de τ, concluímos que $V \in \tau$.

(ii) Pelo Exercício 2.25, um fechado de S é da forma $F \cap S$ com F fechado em X. Sendo S fechado em X, basta observar que a interseção de dois fechados em X é fechada em X. ■

Exercício 2.3

Mostre que se Y é um subespaço de X e Z é um subespaço de Y, então Z é um subespaço de X.

Solução. Sejam τ a topologia de X, e considere

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\} \quad \text{e} \quad \tau_Z = \{V \cap Z : V \in \tau_Y\}$$

as topologias de Y (como subespaço de X) e Z (como subespaço de Y), respectivamente. Ainda, uma vez que $Z \subset Y$, obtemos $Z \cap Y = Z$. Com isso, seja $U \in \tau_Z$ arbitrário e note que

$$U = V \cap Z = (W \cap Y) \cap Z = W \cap (Y \cap Z) = W \cap Z,$$

com $W \in \tau$, e a segunda igualdade segue pelo fato de $V \in \tau_Y$.

Assim, temos que os abertos de τ_Z são da forma $W \cap Z$, com $W \in \tau$, donde segue que (Z, τ_Z) é subespaço de X. ■

Exercício 2.4

Prove que um subespaço de um espaço metrizável é metrizável.

Solução. Seja (X, τ) metrizável com d uma métrica e $S \subseteq X$ um subespaço. Considere $d_S := d|_{S\times S}$ métrica sobre S, τ_{d_S} a topologia correspondente, com $B_X(x, r)$ e $B_S(x, r)$ as bolas relativas a d e d_S, respectivamente, e note que

$$B_S(x, r) = \{y \in S : d_S(x, y) < r\} = B_X(x, r) \cap S, \qquad x \in S, \tag{$*$}$$

uma vez que as métricas d e d_S coincidem sobre $S \times S$.

Note que $\mathcal{B}_d = \{B_d(x, r) : x \in X\}$ é base para τ e, portanto, $\mathcal{B}_{d_S} = \{B_d(x, r) \cap S : x \in X, r > 0\}$ é base de τ_S. Da mesma forma, a coleção $\mathcal{B}_{d_S} = \{B_{d_S}(y, r) : y \in S\}$ é base para τ_{d_S}. Agora, devemos verificar que $\tau_{d_S} = \tau_S$.

Por $(*)$ obtemos

$$B_{d_S}(y, r) = B_d(y, r) \cap S,$$

o qual é um elemento de $\mathcal{B}_{d_S}$. Logo, pelo Lema 2.7 (notas de aula), concluímos que $\tau_{d_S} \subset \tau_S$

Agora, seja $B_d(x, r) \cap S$ um elemento básico de τ_S e tome $y \in B_d(x, r) \cap S$. Observe que ao considerar $s = r - d(x, y) > 0$, obtemos

$$B_d(y, s) \subset B_d(x, r)$$

donde segue que

$$B_{d_S}(y, s) = (B_d(y, s) \cap S) \subset (B_d(x, r) \cap S),$$

isto é, um básico de $\mathcal{B}_{d_S}$ contendo y. Novamente usando o Lema 2.7 (notas de aula), concluímos $\tau_S \subset \tau_{d_S}$ e, portanto, obtemos a igualdade desejada.

Vale ressaltar que na resolução apresentada acima, foi utilizado o seguinte resultado auxiliar presente no livro Topology (Munkres):

Lema 6 (Lema 16.1, Munkres). *Se $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia de X, então $\mathcal{B}_S = \{B \cap S : B \in \mathcal{B}\}$ é base para a topologia do subespaço em S.*

Entretanto, é possível resolver o exercício sem o uso desse resultado auxiliar. De fato, seja $U \in \tau_{d_S}$ de modo que para cada $y \in U$, existe $r_y > 0$ com $B_{d_S}(y, r_y) \subset U$, e $U = \bigcup_{y \in U} B_{d_S}(y, r_y)$, sendo ambos os fatos válidos em razão do Lema 2.5 (notas de aula). Assim, novamente utilizando $(*)$, obtemos

$$U = \bigcup_{y \in U} B_{d_S}(y, r_y) = \bigcup_{y \in U} (B_d(y, r_y) \cap S) = \underbrace{\left(\bigcup_{y \in U} B_d(y, r_y) \right)}_{\in \tau} \cap S \in \tau_S,$$

o que nos garante $\tau_{d_S} \subset \tau_S$.

Agora, seja $U \cap S$, com $U \in \tau$ e tome $y \in U \cap S$. Como U é aberto em $\tau = \tau_d$, e $y \in U$, existe $r > 0$ com $B_d(y, r) \subset U$. Usando $(*)$, $B_{d_S}(y, r) = B_d(y, r) \cap S \subset U \cap S$. Novamente pelo Lema 2.5 (notas de aula), segue que $\tau_S \subset \tau_{d_S}$. Logo, obtemos a igualdade desejada. ■

Exercício 2.5

Suponha S um subespaço de X. Mostre que a função inclusão $i\colon S \to X$ é contínua. Além disso, mostre que a topologia induzida é a mais fraca tal que a inclusão é contínua: se τ' é uma topologia para S tal que $i\colon (S, \tau') \to (X, \tau)$ é contínua, então $\tau_S \subset \tau'$.

Solução. Para U aberto arbitrário em X, obtemos

$$i^{-1}(U) = \{x \in S : i(x) \in U\} = \{x \in S : x \in U\} = U \cap S \in \tau_S,$$

o que implica na continuidade da inclusão.

Agora, suponha τ' topologia sobre S tal que $i : (S, \tau') \to (X, \tau)$ é contínua. Então, para todo $U \in \tau$, $i^{-1}(U) \in \tau'$. Sendo S subespaço de X, temos que $\tau' \ni i^{-1}(U) = U \cap S$, donde $\tau_S \subset \tau'$. ■

Exercício 2.6

Sejam X um espaço topológico, S um subespaço e $i\colon S \to X$ a inclusão. Suponha que S tem uma topologia tal que para todo espaço Y e toda função $f\colon Y \to S$, f é contínua se, e somente se, $i \circ f\colon Y \to X$ é contínua. Prove que a topologia S é a induzida de X.

Solução. Sejam $Y = (S, \sigma)$ (com σ a topologia em S da hipótese) e $f = \mathrm{id}_S$, que é contínua. Por hipótese, $i \circ f = i : (S, \sigma) \to X$ é contínua, e pelo Exercício 2.5, $\tau_S \subseteq \sigma$.

Por outro lado, considere $Y = (S, \tau_S)$ e $f = \mathrm{id} : (S, \tau_S) \to (S, \sigma)$. Pelo Exercício 2.5, sabemos que $i \circ f = i : (S, \tau_S) \to X$ é contínua. Assim, por hipótese, segue que f é contínua, isto é, $\mathrm{id} : (S, \tau_S) \to (S, \sigma)$ é contínua. Por fim, o Exercício 1.15 nos garante que $\sigma \subseteq \tau_S$. ■

Exercício 2.7

Sejam Y um subespaço de X e $A \subset Y$. Denote por $\mathrm{Cl}|_X(A)$ o fecho de A em X e por $\mathrm{Cl}|_Y(A)$ o fecho de A em Y. Prove que $\mathrm{Cl}|_Y(A) \subset \mathrm{Cl}|_X(A)$. Mostre que, em geral, $\mathrm{Cl}|_Y(A) \neq \mathrm{Cl}|_X(A)$.

Solução. De início, recorde que se C é fechado em X, então $C \cap Y$ é fechado em Y. Isso posto, sabemos que $\mathrm{Cl}|_X(A)$ é fechado em X por definição, donde segue que $\mathrm{Cl}|_X(A) \cap Y$ é fechado em Y. Ainda, sabemos que o fecho é o menor fechado do espaço que contém o conjunto em questão (definição de fecho). Logo, uma vez que $A \subset \mathrm{Cl}|_X(A)$ e $A \subset Y$, segue que

$$\mathrm{Cl}|_Y(A) \subset (\mathrm{Cl}|_X(A) \cap Y) \subset \mathrm{Cl}|_X(A).$$

Com exemplo de que a igualdade nem sempre ocorre, é suficiente considerar $X = \mathbb{R}$ com a topologia usual, $Y = (0, 2)$ e $A = (0, 1)$. Sabemos que $\mathrm{Cl}|_{\mathbb{R}}((0, 1)) = [0, 1]$ (visto em aula) e $\mathrm{Cl}|_Y((0, 1)) = (0, 1]$ (aqui vocês devem verificar este fato, e para isso basta mostrar que $(0, 1]$ é fechado em Y e que $1 \in \mathrm{Cl}|_Y((0, 1))$). Feito isso, basta observar que

$$\mathrm{Cl}|_Y(A) = \mathrm{Cl}|_Y((0, 1)) = (0, 1] \subsetneq [0, 1] = \mathrm{Cl}|_{\mathbb{R}}((0, 1)) = \mathrm{Cl}|_{\mathbb{R}}(A).$$

Observem que a demonstração da inclusão também poderia ser feita utilizando diretamente a topologia do subespaço. De fato, seja $x \in \mathrm{Cl}|_Y(A)$. Pelo Lema 1.9 (notas de aula), é suficiente mostrar que para todo $U \in \tau_X$, $x \in U$, tem-se $U \cap A \neq \emptyset$.

Pois bem, observe que $U \cap Y$ é aberto em Y, uma vez que Y é subespaço de X. Além disso, $x \in U \cap Y$, uma vez que $x \in \mathrm{Cl}|_Y(A) \subset Y$ e $x \in U$. Como $x \in \mathrm{Cl}|_Y(A)$ e $U \cap Y$ é aberto em Y contendo x, pelo Lema 1.9 (notas de aula), obtemos

$$(U \cap Y) \cap A \neq \emptyset.$$

Pelo fato de $A \subset Y$, i.e., $A \cap Y = A$, então na verdade obtemos que

$$U \cap A \neq \emptyset,$$

e pela arbitrariedade de $U \ni x$, concluímos o desejado. Por fim, utilizando o Lema 1.9 (notas de aula) mais uma vez, segue que $x \in \mathrm{Cl}|_X(A)$ e, portanto, a inclusão desejada segue. ■

Exercício 2.8

Mostre que o subconjunto (a, b) de $\mathbb{R}$ com a topologia induzida é homeomorfo a $\mathbb{R}$.
(Dica: use funções do tipo $x \mapsto \mathrm{tg}(\pi(cx + d))$).

Solução. Primeiro, mostremos que $(a, b) \simeq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Com efeito, defina $\Phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(x) = \alpha x + \beta, \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{\pi}{b - a} > 0 \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{\pi a}{b - a} - \frac{\pi}{2},$$

e considere φ a aplicação $(a,b) \mapsto (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ determinada por Φ. Note que Φ está bem definida, isto é, leva (a,b) em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. De fato, seja $x \in (a,b)$ e note que $\Phi(x) > 0$, uma vez que $x - a > 0$ e $b - a > 0$. Ainda, $\dfrac{\pi}{2} - \Phi(x) > 0$ uma vez que $b - x > 0$ e

$$\frac{\pi}{2} - \Phi(x) = \pi - \frac{\pi(x-a)}{b-a} = \frac{\pi[(b-a)-(x-a)]}{b-a} = \frac{\pi(b-x)}{b-a} > 0.$$

Assim, segue que $-\dfrac{\pi}{2} < \Phi(x) < \dfrac{\pi}{2}$, ou seja, $\Phi((a,b)) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Agora, defina $\Psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\Psi(y) = a + \frac{b-a}{\pi}\left(y + \frac{\pi}{2}\right),$$

e note que Ψ leva $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ em (a,b). De fato, para $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ obtemos

$$\Psi(y) - a = \frac{b-a}{\pi}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

e

$$b - \Psi(y) = (b-a) - \frac{b-a}{\pi}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{b-a}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) > 0,$$

donde segue que Ψ leva $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ em (a,b). Além disso, para $x \in (a,b)$ e $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\Psi(\Phi(x)) = a + \frac{b-a}{\pi}\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = a + \frac{b-a}{\pi}\frac{\pi(x-a)}{b-a} = a + (x-a) = x$$

e

$$\Phi(\Psi(y)) = \frac{\pi(\Psi(y)-a)}{b-a} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{b-a}\frac{b-a}{\pi}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = y,$$

donde segue que $\varphi\colon (a,b) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é uma bijeção, com inversa $\psi = \Psi|_{(-\pi/2, \pi/2)}$.

Também temos que Φ é contínua em $\mathbb{R}$, uma vez que ao considerar $c < d$ obtemos

$$\Phi^{-1}((c,d)) = \{x : c < \alpha x + \beta < d\} = \left(\frac{c-\beta}{\alpha}, \frac{d-\beta}{\alpha}\right),$$

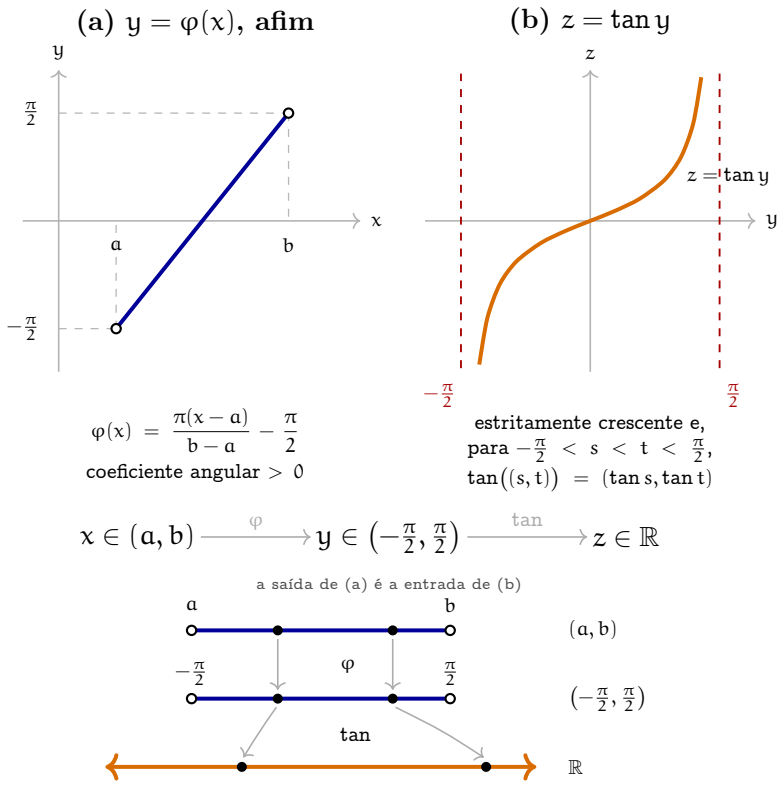
i.e., imagem inversa de um aberto básico é um aberto. Pelos mesmo argumentos, é possível verificar que Ψ é contínua (Aqui é necessário que vocês verifiquem isso).

Antes de prosseguir, é importante observar onde é usado a topologia do subespaço. Ao considerar $U \subset \mathbb{R}$ um aberto arbitrário, um aberto de $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é da forma $U \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Com isso,

$$\varphi^{-1}\left(U \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \varphi^{-1}(U) = \Phi^{-1}(U) \cap (a,b),$$

onde a primeira igualdade segue pelo fato de pertencer a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ segue por $\Phi((a,b)) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e a segunda igualdade segue pela topologia de subespaço do domínio, haja vista que $\Phi^{-1}(U) \cap (a,b)$ é da forma "aberto de $\mathbb{R}$ intersectados com (a,b)", ou seja, um aberto de (a,b) com a topologia do subespaço.

Note que tan é contínua. De fato, sabemos que sin e cos são contínuas, e que o quociente de duas funções contínuas com denominador não nulo é uma função contínua. Ainda, ao considerar $U = \cos^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ tem-se que este é aberto. Como $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset U$ é aberto, obtemos a continuidade no



Aproximar-se do extremo b empurra a imagem para $+\infty$: o intervalo limitado e a reta inteira são *topologicamente* indistinguíveis.

subespaço. Além disso, sabemos que tan é uma bijeção (curso de Cálculo ou Análise I). Também temos que $\tan^{-1}$ é contínua (vocês precisam verificar este fato; usem argumento com arctan ou mostrem que tan é uma aplicação aberta).

Por fim, basta observar que $\tan \circ \varphi(a,b) \to \mathbb{R}$ é uma composição de homeomorfismos e, portanto, um homeomorfismo. ■

Exercício 2.9

Sejam X, Y espaços topológicos e S subespaço de X. Prove que se $f\colon X \to Y$ é contínua então $f|_S\colon S \to Y$ também o é.

Solução. Basta observar que $f|_S = f \circ i\colon S \to Y$ e, portanto, $f|_S$ é contínua como composta de aplicações contínuas. ■

Exercício 2.10

Mostre que os subespaços $(1,\infty)$ e $(0,1)$ de $\mathbb{R}$ com a topologia usual são homeomorfos. (Dica: use a função $x \mapsto 1/x$).

Solução. Defina $h : (1,+\infty) \to (0,1)$ por $h(x) = \frac{1}{x}$ e note que h é bem definida. Além disso,

sabemos que sua inversa $g\colon (0,1) \to (1,\infty)$, representada por $g(y) = \dfrac{1}{y}$, também está bem definida.

Além disso, sabemos que $h(x)$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Como $(1,+\infty)$ e $(0,1)$ estão contidos nesse conjunto (também são subespaços com a topologia induzida), então pelo Exercício 2.9 temos que as restrições a tais conjuntos também são contínuas.

Logo h é bijeção contínua com inversa contínua, i.e., um homeomorfismo. ■

Exercício 2.11

Prove que $S^n - \{(0,0,\ldots,1)\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual.

Solução. Considere $x = (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, e defina as aplicações $\varphi\colon S^n\setminus\{N\} \to \mathbb{R}^n$ e $\psi\colon \mathbb{R}^n \to S^n\setminus\{N\}$ por

$$\varphi(x) = \frac{\bar{x}}{1-x_{n+1}} \quad \text{e} \quad \psi(y) = \frac{(2y,\ \|y\|^2-1)}{\|y\|^2+1}.$$

Note que φ está bem definida e é contínua. De fato, para $x \in S^n\setminus\{N\}$ tem-se $x_{n+1} \neq 1$, uma vez que se $x_{n+1} = 1$ então $\|\bar{x}\|^2 = 1-1 = 0$, forçando $x = N$. Logo, $1-x_{n+1} \neq 0$. Uma vez que as coordenadas de φ são quocientes de funções contínuas com denominador não nulo, segue que φ é uma aplicação contínua em $S^n\setminus\{N\}$. De forma similar, note que ψ está bem definida e é contínua. De fato, $\|y\|^2+1$ é sempre não-nulo e assim as coordenadas de ψ são funções contínuas e, portanto, ψ é uma aplicação contínua.

Além disso $\psi(y) \in S^n$ e $\psi(y) \neq N$, haja vista que

$$\|2y\|^2 + \left(\|y\|^2-1\right)^2 = 4\|y\|^2 + \|y\|^4 - 2\|y\|^2 + 1 = \left(\|y\|^2+1\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} < 1.$$

Agora, afirmamos que $\psi = \varphi^{-1}$. Primeiro, $\varphi(\psi(y)) = y$:

$$\varphi(\psi(y)) = \frac{\frac{2y}{\|y\|^2+1}}{1-\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}} = \frac{\frac{2y}{\|y\|^2+1}}{\frac{2}{\|y\|^2+1}} = y.$$

Ainda, $\psi(\varphi(x)) = x$. De fato, considere $y = \varphi(x) = \dfrac{\bar{x}}{1-x_{n+1}}$ e note que

$$\|\bar{x}\|^2 = 1-x_{n+1}^2 = (1-x_{n+1})(1+x_{n+1}),$$

donde segue que

$$\|y\|^2 = \frac{(1-x_{n+1})(1+x_{n+1})}{(1-x_{n+1})^2} = \frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}},$$

o que por sua vez implica em

$$\|y\|^2 + 1 = \frac{2}{1-x_{n+1}} \quad \text{e} \quad \|y\|^2 - 1 = \frac{2x_{n+1}}{1-x_{n+1}}$$

Logo,

$$\psi(\varphi(x)) = \left(\frac{\frac{2\bar{x}}{1-x_{n+1}}}{\frac{2}{1-x_{n+1}}}, \frac{\frac{2x_{n+1}}{1-x_{n+1}}}{\frac{2}{1-x_{n+1}}}\right) = (\bar{x}, x_{n+1}) = x,$$

o que nos garante $\psi = \varphi^{-1}$. Portanto φ é uma bijeção contínua com inversa ψ contínua, i.e., um homeomorfismo. As representações abaixo ilustram os casos $n = 1, 2$, bem como a construção das aplicações utilizadas. ■

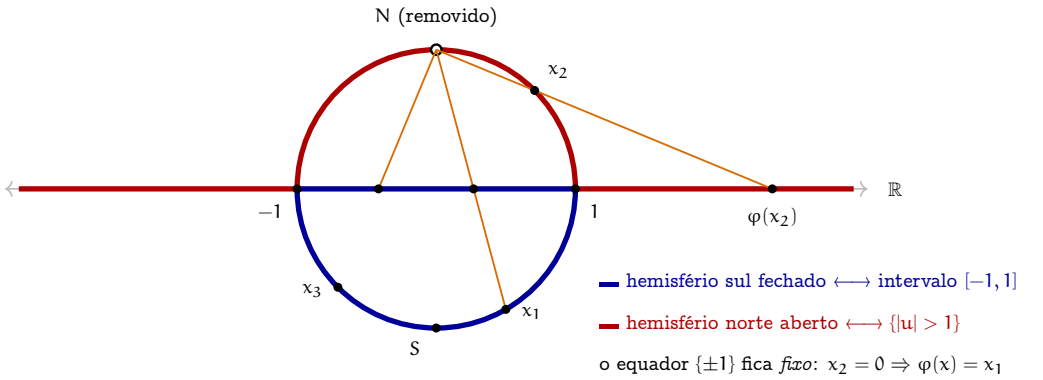
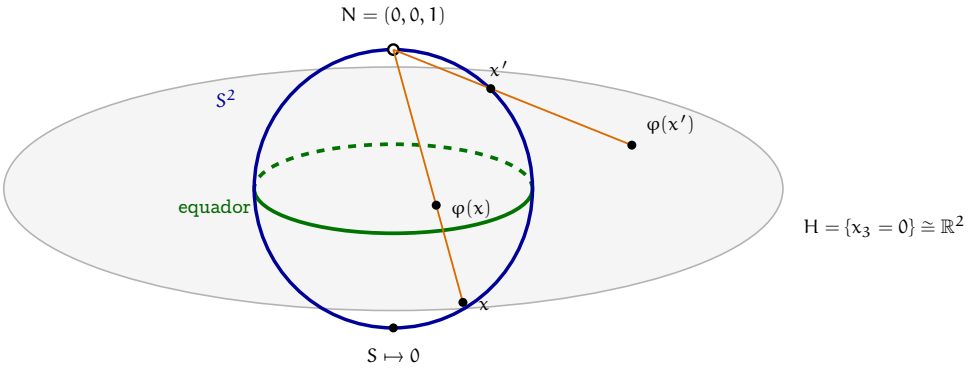


Figura 2.1: Caso $n = 1$. Cada reta laranja parte de N, corta o círculo num segundo ponto e o eixo horizontal num único ponto: é a bijeção. O hemisfério sul vai para dentro de $[-1, 1]$, o equador fica fixo e o hemisfério norte vai para fora; quanto mais perto de N estiver x, mais horizontal fica a reta e mais longe cai $\varphi(x)$.



O equador coincide com o círculo unitário de H e fica fixo ponto a ponto.

Dentro dele: imagem do hemisfério sul. Fora: imagem do hemisfério norte.
A construção é a mesma para todo n — só a figura muda.

Figura 2.2: Caso $n = 2$. A esfera S^2 é vista ligeiramente de cima. Note que o equador e o círculo unitário de H são o *mesmo* conjunto na figura, porque $x_3 = 0$ implica $\varphi(x) = \bar{x}/(1-0) = \bar{x}$. Nada na demonstração depende de n: as contas usam apenas $\|\bar{x}\|^2 = 1 - x_{n+1}^2$ e a norma euclidiana.

Expliquemos a construção das aplicações utilizadas. Seja ℓ a reta que passa por N e possui como vetor diretor $v \neq 0$. Considerando a seguinte parametrização para ℓ

$$\gamma(s) = N + sv,$$

note que

$$\|\gamma(s)\|^2 = \|N\|^2 + 2s\langle N, v\rangle + s^2\|v\|^2 = 1 + 2sv_{n+1} + s^2\|v\|^2,$$

onde a segunda igualdade segue pelos fatos $\|N\| = 1$ e $\langle N, v\rangle = v_{n+1}$. Dessa forma, temos que $\gamma(s) \in S^n$ se, e somente se,

$$s\left(s\|v\|^2 + 2v_{n+1}\right) = 0 \Leftrightarrow s = 0 \quad \text{ou} \quad s = -\frac{2v_{n+1}}{\|v\|^2}.$$

Note que $s = 0$ nos retorna o ponto N. Ainda, a outra possibilidade é diferente de 0 quando $v_{n+1} \neq 0$, e note que existe no máximo um elemento que torna isso verdade, uma vez que $\|v\|^2 \neq 0$. Além disso, $\gamma(s) \in H$ se, e somente se, $1 + sv_{n+1} = 0$.

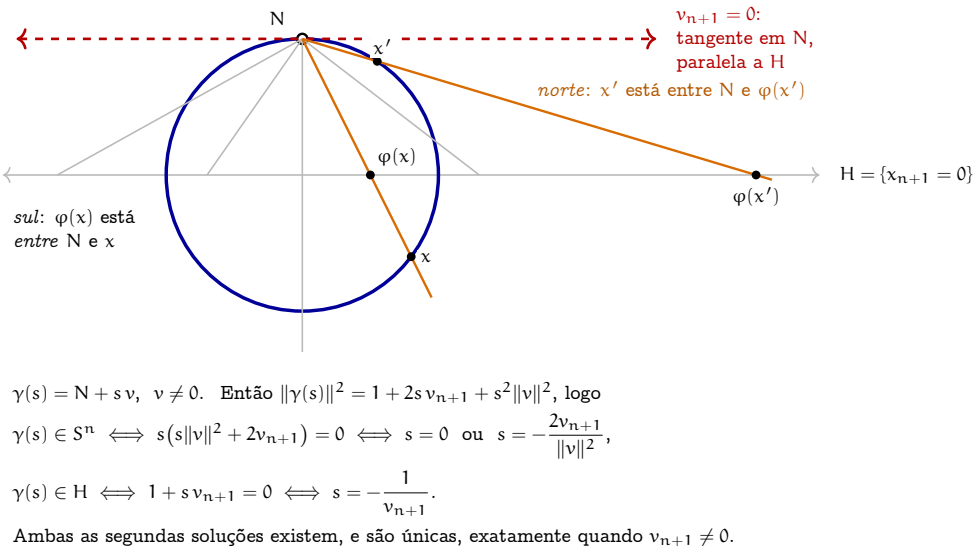


Figura 2.3: A construção. Todas as retas por N formam um feixe; a tracejada vermelha é a única direção excluída ($v_{n+1} = 0$), e ela falha *simultaneamente* em reencontrar S^n e em encontrar H — é essa coincidência que faz a construção funcionar. Para toda outra direção há exatamente um segundo ponto na esfera e exatamente um ponto em H, e φ e ψ são as duas leituras opostas do mesmo segmento. As fórmulas $\varphi(x) = \bar{x}/(1 - x_{n+1})$ e $\psi(y) = \left(2y, \|y\|^2 - 1\right)/\left(\|y\|^2 + 1\right)$ são apenas essas duas raízes escritas por extenso.

Geometricamente, $v_{n+1} = 0$ significa que ℓ está contida no hiperplano tangente $\{x_{n+1} = 1\}$ a S^n em N: as retas excluídas são exatamente as *tangentes em* N, que são também exatamente as *paralelas a* H. É essa coincidência que faz toda a construção funcionar. Até o presente momento, construímos o seguinte:

$$S^n \setminus \{N\} \xleftarrow{\text{2ª interseção}} \left\{\text{retas por N não tangentes em N}\right\} \xrightarrow{\cap H} H.$$

Ambas as flechas são bijeções: cada reta não tangente determina exatamente um ponto de cada lado e, reciprocamente, cada ponto $x \neq N$ de S^n, bem como cada ponto de H, determina exatamente uma reta por N (um ponto distinto de N e o próprio N determinam uma única reta). Assim, a questão agora é como determinar uma expressão para cada flecha acima.

Fixe $x \in S^n \setminus \{N\}$. A reta por N e x tem vetor diretor $v = x - N = (\bar{x},\ x_{n+1} - 1)$, de modo que

$$\gamma(s) = N + s(x - N) = \left(s\bar{x},\ 1 + s(x_{n+1} - 1)\right).$$

Observe que a expressão está bem definida. Primeiro, tem-se que o vetor diretor é não nulo. Ter $v = 0$ significaria $x = N$, o que não pode acontecer. Logo a reta existe. Ainda, note que a reta

não é paralela a H. Para que tal fato ocorra, é preciso que $v_{n+1} = x_{n+1} - 1 \neq 0$. Suponha, que $x_{n+1} = 1$. Então, de $\|x\| = 1$, obtemos

$$\|\overline{x}\|^2 = 1 - x_{n+1}^2 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \overline{x} = 0 \Rightarrow x = N,$$

o que sabemos ser uma contradição. Portanto, sobre a esfera, $x_{n+1} = 1$ ocorre somente em N; este é o único fato que garante que φ está bem definida, e é a razão pela qual exatamente um ponto precisa ser removido.

Além disso, tem-se $\gamma(s) \in H$ se, e somente se, $1 + s(x_{n+1} - 1) = 0$, isto é,

$$s = \frac{1}{1 - x_{n+1}},$$

o que é legítimo e único pelos fatos constatados acima. Substituindo nas n primeiras coordenadas:

$$\varphi(x) = s\,\bar{x} = \frac{\bar{x}}{1 - x_{n+1}}.$$

Agora fixe $y \in \mathbb{R}^n$, isto é, o ponto $(y, 0) \in H$. A reta por N e $(y, 0)$ tem vetor diretor $v = (y, 0) - N = (y, -1)$, e

$$\gamma(s) = N + s(y, -1) = (sy,\ 1 - s).$$

Note que a expressão está bem definida. Sempre se tem $v \neq 0$, pois $v_{n+1} = -1 \neq 0$. Em particular $(y, 0) \neq N$ para todo y, de modo que a reta sempre existe e nunca é tangente em N: ela sempre encontra S^n uma segunda vez. Não há y excepcional; é essa a assimetria em relação a φ, e a razão pela qual $\mathbb{R}^n$ não precisa de nenhum ponto removido.

Impondo $\|\gamma(s)\| = 1$, obtemos

$$\|sy\|^2 + (1 - s)^2 = 1 \iff s^2\|y\|^2 + 1 - 2s + s^2 = 1 \iff s^2\big(\|y\|^2 + 1\big) - 2s = 0,$$

isto é,

$$s\Big[s\big(\|y\|^2 + 1\big) - 2\Big] = 0.$$

Ainda, o coeficiente dominante é $\|y\|^2 + 1 \geq 1 > 0$, logo a equação acima nunca degenera, e há exatamente duas raízes:

$$s = 0 \quad \text{(que dá N)}, \qquad s = \frac{2}{\|y\|^2 + 1} \quad \text{(o ponto procurado)}.$$

A segunda raiz é estritamente positiva, logo diferente de 0: as duas raízes são de fato distintas e o segundo ponto de interseção não é N. Com $s = 2/(\|y\|^2 + 1)$, obtemos

$$sy = \frac{2y}{\|y\|^2 + 1}, \qquad 1 - s = 1 - \frac{2}{\|y\|^2 + 1} = \frac{(\|y\|^2 + 1) - 2}{\|y\|^2 + 1} = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}.$$

Portanto,

$$\psi(y) = \left(\frac{2y}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\right),$$

com os numeradores $2y$ e $\|y\|^2 - 1$ e o denominador comum $\|y\|^2 + 1$ resultam da substituição da raiz não nula daquela equação do segundo grau, nada além disso.

Exercício 2.12

Prove que $\tau_f = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}$ é uma topologia.

Solução. Sabemos que $\emptyset, X$ sao abertos, e pelo fato de $f^{-1}\emptyset = \emptyset$ e $f^{-1}\emptyset = \emptyset$, concluímos que $\emptyset, X \in \tau_f$. Agora, considere $U, V \in \tau_f$, ou seja, $U, V \subset Y$ tais que $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \tau_X$. Assim, pela propriedade (R2) da Observação 1.1, obtemos

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \tau_X,$$

o que implica em $U \cap V \in \tau_f$, uma vez que tal interseção é subconjunto de Y.

Se $\{U_j\}_{j\in J} \subset \tau_f$, então $U_j \subset Y$ e $f^{-1}(U_j) \in \tau_X$ para todo $j \in J$. Assim, pela propriedade (R1) da Observação 1.1, obtemos

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} U_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(U_j) \in \tau_X,$$

donde segue que $\bigcup_{j\in J} U_j \in \tau_f$. ■

Exercício 2.13

Suponha Y com a topologia quociente com respeito a $f\colon X \to Y$. Mostre que essa é a maior topologia que torna f contínua.

Solução. Sejam τ_X e τ_Y as topologias de X e Y, respectivamente, tal que $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ é contínua e considere $U \in \tau_Y$ arbitrário. Sendo f contínua, $f^{-1}(U) \in \tau_X$ e assim, pela definiçao de τ_f, concluímos que $U \in \tau_f$. Pela arbitrariedade de U, obtemos $\tau_Y \subset \tau_f$. ■

Exercício 2.14

Suponha Y com a topologia quociente com respeito a $f\colon X \to Y$. Mostre que $A \subset Y$ é fechado se, e somente se, $f^{-1}(A)$ é fechado em X.

Solução. Se $A \subset Y$ é fechado, então $Y - A$ é aberto, e pelo fato de estarmos considerando Y com τ_f, segue que $f^{-1}(Y - A) \in \tau_X$. Pela propriedade (R3) da Observação 1.1,

$$\tau_X \ni f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A),$$

o que nos garante que $f^{-1}(A)$ é fechado.

Por fim, basta observar que a outra cadeia de implicações segue de forma análoga, utilizando as mesmas propriedades. ■

Para resolver o próximo exercício, utilizaremos os seguintes resultado auxiliares.

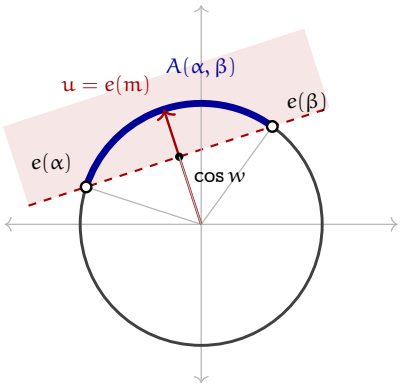
Lema 7. *Seja $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ um arco de extremos α e β. Então $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ é aberto em S^1, sempre que $0 < b - a < 2\pi$.*

Ponha

$$m := \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad w := \frac{\beta-\alpha}{2} \in (0,\pi), \qquad u := e(m),$$

de modo que $(\alpha,\beta) = (m-w, m+w)$, onde $e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é representada por $e(t) = (\cos(t), \sin(t))$, e considere $H := \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, u\rangle > \cos w\}$. Note que H é aberto em $\mathbb{R}^2$; aqui é suficiente que vocês utilizem a Desigualdade de Cauchy–Schwarz.

Agora, note que $\mathcal{A}(\alpha,\beta) = S^1 \cap H$; para mostrar este fato, é suficiente vocês verificarem que $p \in H$ se, e somente se, $p \in \mathcal{A}(\alpha,\beta)$. Dessa forma, uma vez que estamos considerando a topologia so subespaço sobre S^1, concluímos que $\mathcal{A}(\alpha,\beta)$ é aberto em S^1 por definiçao.



$$\mathcal{A}(\alpha,\beta) = S^1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, u\rangle > \cos w\},$$

pois $\langle e(\theta), e(m)\rangle = \cos(\theta - m)$ e cos é estritamente decrescente em $[0,\pi]$. O conjunto à direita é pré-imagem de $(\cos w, +\infty)$ pela aplicação contínua $x \mapsto \langle x, u\rangle$, logo é semiplano aberto e $\mathcal{A}(\alpha,\beta)$ é aberto em S^1. A reta tracejada é o segmento que une os extremos do arco.

Obs: Caso vocês possam assumir que os abertos de S^1 como subespaço de $\mathbb{R}^2$ são as reuniões de arcos abertos, e, portanto, que um arco aberto é um aberto de S^1, então o Lema 7 pode ser tomado como verdade.

Exercício 2.15

Seja $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ definida por $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Prove que a topologia quociente t_f sobre S^1 coincide com a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$.

Solução. Considere $f\colon \mathbb{R} \to (S^1, \tau_{sub})$ e note que f é contínua. De fato, seja W aberto em S^1; por definição $W = V \cap S^1$ com V aberto em $\mathbb{R}^2$ e

$$f^{-1}(W) = \{t : f(t) \in V \text{ e } f(t) \in S^1\} = f^{-1}(V),$$

uma vez que $f(t) \in S^1$ sempre ocorre.

Seja $t_0 \in f^{-1}(V)$, e note que pelo fato de V ser aberto em $\mathbb{R}^2$, existe $\varepsilon > 0$ com $B(f(t_0), \varepsilon) \subseteq V$; considere $\delta := \varepsilon/2\pi$. Se $|t - t_0| < \delta$, então $\|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$, donde segue $f(t) \in V$. Assim $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq f^{-1}(V)$, e $f^{-1}(W)$ é aberto. Logo, f é contínua.

Ainda, também temos que f é uma aplicação sobrejetora e aberta. O fato da sobrejetividade segue analisando as possibilidades para cos e sin com relação aos intervalos considerados (vocês devem verificar a sobrejetividade). Vejamos o fato de f ser aberta. Seja $U \subseteq \mathbb{R}$ aberto, ou seja, para cada $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ com $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$; trocando ε por $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon, \frac{1}{4}\}$, a inclusão

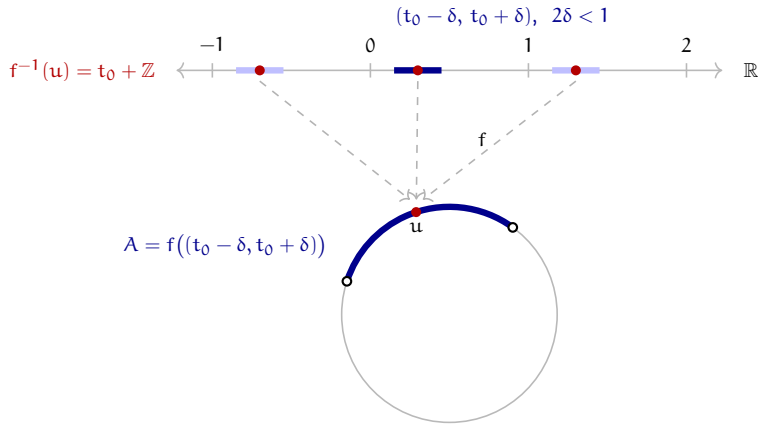
persiste e o comprimento passa a ser $2\varepsilon_x \leq \frac{1}{2}$. Como cada $x \in U$ está no seu próprio intervalo, obtemos

$$U = \bigcup_{x \in U} (x - \varepsilon_x,\ x + \varepsilon_x).$$

Logo

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} f\big((x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)\big) = \bigcup_{x \in U} \mathcal{A}\big(2\pi(x - \varepsilon_x),\ 2\pi(x + \varepsilon_x)\big),$$

e cada um desses arcos tem largura $4\pi\varepsilon_x \leq \pi < 2\pi$, logo é aberto pelo Lema 7. Como união de abertos é um conjunto aberto, segue que f é uma aplicação aberta.



Isso posto, seja $V \in \tau_{sub}$, e note que pela continuidade de $f\colon \mathbb{R} \to (S^1, \tau_{sub})$ obtemos $f^{-1}(V)$ aberto em $\mathbb{R}$, o que por sua vez implica em $V \in \tau_f$ e, portanto, $\tau_{sub} \subset \tau_f$.

Por outro lado, se $U \in \tau_f$ então $f^{-1}(U)$ aberto em $\mathbb{R}$. Como f é sobrejetora, então pela propriedade (R9) da Observação 1.1, obtemos $f\big(f^{-1}(U)\big) = U$. Sendo f uma aplicaçao aberta, segue que U é aberto em S^1 e, portanto, $\tau_f \subseteq \tau_{sub}$. ■

Observação 2

O exercício acima poderia ser resolvido (de uma forma mais natural) utilizando argumentos que serão vistos nos Capítulos 7 e 8 (recomento, quando tais resultados forem vistos, vocês voltarem neste exercício e refazerem ele de outro modo). Depois do Exercício 1 do §8.3 pode-se argumentar assim: a restrição $f|_{[0,1]} : [0,1] \to S^1$ é sobrejeção contínua de um compacto (Teorema 7.2) sobre um Hausdorff (Exemplo 8.1 e Teorema 8.6), logo é aplicação quociente; um argumento de saturação transfere isso para f em todo o $\mathbb{R}$. É mais curto, mas usa quatro resultados posteriores.

Exercício 2.16

Sejam X, Y, Z espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ sobrejeções. Prove que se Y e Z têm as topologias quociente determinadas por f e g, respectivamente, então a topologia de Z é a topologia quociente determinada por $g \circ f\colon X \to Z$.

Solução. Primeiro, observe que $g \circ f$ é sobrejetora como composição de sobrejeções, e assim faz sentido considerar

$$\tau_{g\circ f} = \{U \subset Z : (g \circ f)^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}.$$

Seja $U \subseteq Z$ arbitrário. Se $U \in \tau_{g\circ f}$ então

$$f^{-1} \circ g^{-1}(U) = (g \circ f)^{-1}(U) \quad \text{é aberto em } X,$$

o que por sua vez implica em $g^{-1}(U) \in \tau_f$ e, portanto, $U \in \tau_g$, haja vista que estamos considerando as topologias τ_f em Y e τ_g em Z. Dessa forma, temos que $\tau_{g\circ f} \subset \tau_g$.

Pelos mesmos argumentos, obtemos $\tau_g \subset \tau_{g\circ f}$. Como a topologia considerada em Z é τ_g, então concluímos o exercício. ■

Exercício 2.17

Prove que $\mathbb{R}P^1$ e S^1 são homeomorfos.

Solução. Sejam $\mathbb{R}P^1 = \{\{x, -x\} : x \in S^1\}$ com a topologia quociente determinada por $\pi : S^1 \to \mathbb{R}P^1$, $\pi(x) = \{x, -x\}$. Considere $e(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $\mathcal{A}(\alpha, \beta) = e\big((\alpha, \beta)\big)$ como em exercícios anteriores, e defina $h\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ por

$$h(u, v) = \big(u^2 - v^2,\ 2uv\big).$$

Observe que h toma valores em S^1. De fato, para $(u, v) \in S^1$ obtemos

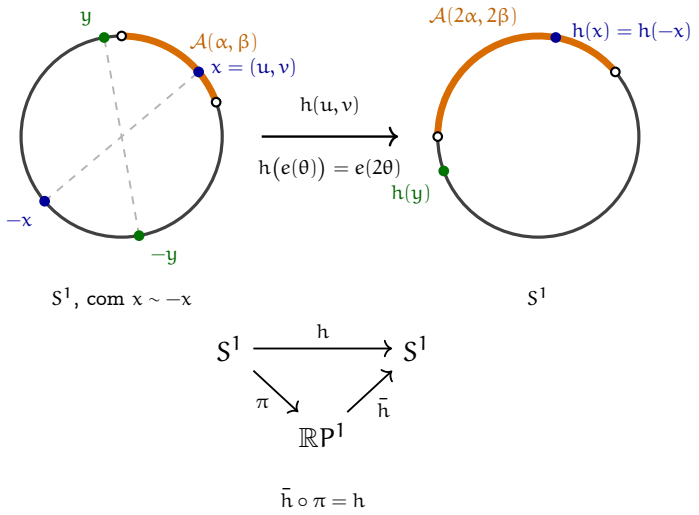


Figura 2.4: A aplicação é $h(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, que em termos de ângulo é $\theta \mapsto 2\theta$; ela identifica exatamente os pares antipodais, pois θ e $\theta + \pi$ têm dobros que diferem por 2π. Os diâmetros tracejados são quando $\pi(x) = \pi(x')$ implica $h(x) = h(x')$. O diagrama exibe a fatoração $\overline{h} \circ \pi = h$. O fato de h ser aberta está ilustrada pelos arcos laranja: dobrar a largura de um arco de largura estritamente menor que π produz um arco de largura estritamente menor que 2π, ainda aberto.

$$\big(u^2 - v^2\big)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = \big(u^2 + v^2\big)^2 = 1.$$

Logo $h(S^1) \subseteq S^1$, e passamos a ver $h\colon S^1 \to S^1$. Ainda, por argumentos similares aos utilizados no Exercício 2.15, segue que h é contínua. Ainda, usando que $h(e(\theta)) = e(2\theta)$ (atrelada as formulas de arco duplo), também temos que h é uma aplicação sobrejetora. Mostremos que $h(x) = h(y)$ se, e somente se, $\pi(x) = \pi(y)$. Primeiro, como cada coordenada de h é monômio de grau dois, segue que

$$h(-u,-v) = \big((-u)^2 - (-v)^2,\ 2(-u)(-v)\big) = \big(u^2 - v^2,\ 2uv\big) = h(u,v).$$

Por outro lado, ao considerar $x = (u,v)$ e $y = (p,q)$ em S^1 com $h(x) = h(y)$, temos

$$u^2 - v^2 = p^2 - q^2, \qquad uv = pq, \tag{I}$$

e, por estarem em S^1,

$$u^2 + v^2 = 1 = p^2 + q^2. \tag{II}$$

Somando (I) e (II) membro a membro obtém-se $2u^2 = 2p^2$; subtraindo (I) de (II), $2v^2 = 2q^2$. Logo

$$u^2 = p^2 \quad \text{e} \quad v^2 = q^2, \qquad \text{isto é,} \qquad |u| = |p|, \quad |v| = |q|. \tag{III}$$

Agora, vocês devem analisar três casos ($u = 0$, $v = 0$ e $u, v \neq 0$), e observar que em todos os casos obtemos $y = \pm x$, ou seja, $\{x,-x\} = \{y,-y\}$. Além disso, tem-se que h é uma aplicação aberta. Para verificar este fato, vocês devem mostrar que (i) arcos de largura estritamente menor que π formam uma base para S^1, (ii) aplicação h leva arcos em arcos.

Defina $\overline{h}\colon \mathbb{R}P^1 \to S^1$ por $\overline{h}(\{x,-x\}) := h(x)$ e note que a definição não depende do representante escolhido, e vale $\overline{h}\circ\pi = h$. Pela Propriedade Universal da Topologia Quociente, como $\overline{h}\circ\pi = h$ com h contínua, obtemos que $\overline{h}$ é contínua. Ainda, também temos que $\overline{h}$ é uma bijeçao; a sobrejetividade segue pelo fato de π e h serem sobrejetoras, logo $\overline{h}(\mathbb{R}P^1) = \overline{h}\big(\pi(S^1)\big) = h(S^1) = S^1$; com relação a injetividade, se $\overline{h}(\{x,-x\}) = \overline{h}(\{y,-y\})$, então $h(x) = h(y)$, donde segue $\{x,-x\} = \{y,-y\}$.

Observe que $\overline{h}$ é aberta. Seja W aberto em $\mathbb{R}P^1$. Como π é sobrejetora, $\pi\big(\pi^{-1}(W)\big) = W$, e portanto

$$\bar{h}(W) = \bar{h}\Big(\pi\big(\pi^{-1}(W)\big)\Big) = (\bar{h}\circ\pi)\big(\pi^{-1}(W)\big) = h\big(\pi^{-1}(W)\big).$$

Pela topologia quociente, $\pi^{-1}(W)$ é aberto em S^1, e usando o fato de h ser aberta obtemos $h\big(\pi^{-1}(W)\big)$ é aberto. Logo $\bar{h}(W)$ é aberto.

Portanto, sendo $\bar{h}$ bijeção contínua e aberta, o Exercício 1.22 nos garante que $\bar{h}^{-1}$ é contínua. Portanto $\bar{h}$ é homeomorfismo, isto é, $\mathbb{R}P^1 \simeq S^1$. ■

Exercício 2.18

Mostre que a funçao $f\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\{-x,x\} \mapsto (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3),$$

onde $x = (x_1,x_2,x_3) \in S^2$, é contínua e injetora.

Solução. Como no Exemplo 5.3 das notas de aula, seja $\mathbb{R}P^2 = \{\{x,-x\} : x \in S^2\}$ com a topologia quociente determinada por $\pi\colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$, $\pi(x) = \{x,-x\}$, e defina $F\colon S^2 \to \mathbb{R}^4$ por

$$F(x) = \big(x_1^2 - x_2^2,\ x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3\big),$$

de modo que a aplicação do enunciado é a induzida por F no quociente. Agora, vejamos que F é contínua. De fato, pela mesma fórmula de F, defina $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, isto é,

$$G(x) = \big(x_1^2 - x_2^2,\ x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3\big),$$

de modo que $F = G|_{S^2}$. Fixe $x_0 \in \mathbb{R}^3$, considere $x \in \mathbb{R}^3$ com $\|x - x_0\| < 1$ e defina $M := \|x_0\| + 1$. Assim, temos $\|x\| \leq \|x_0\| + \|x - x_0\| < M$; em particular

$$|x_i| \leq M \quad \text{e} \quad |(x_0)_i| \leq M \qquad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Tomando $\Delta_i := |x_i - (x_0)_i|$ e estimando as quatro coordenadas de $G(x) - G(x_0)$ (vocês devem verificar essa parte), usando o fato acima atrelado ao fato de $\|v\| \leq |v_1| + |v_2| + |v_3| + |v_4|$ para $v \in \mathbb{R}^4$, obtemos

$$\|G(x) - G(x_0)\| \leq M\big(4\Delta_1 + 4\Delta_2 + 2\Delta_3\big) \leq 10M\,\|x - x_0\| \qquad \text{sempre que } \|x - x_0\| < 1.$$

Seja $V \subseteq \mathbb{R}^4$ aberto e $x_0 \in G^{-1}(V)$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ com $B\big(G(x_0), \varepsilon\big) \subseteq V$. Tomando

$$\delta := \min\Big\{1,\ \frac{\varepsilon}{10M}\Big\} > 0, \qquad M = \|x_0\| + 1,$$

obtemos que se $\|x - x_0\| < \delta$, então $\|x - x_0\| < 1$, donde

$$\|G(x) - G(x_0)\| \leq 10M\|x - x_0\| < 10M\delta \leq \varepsilon,$$

o que por sua vez implica $G(x) \in V$. Assim $B(x_0, \delta) \subseteq G^{-1}(V)$. Como $x_0 \in G^{-1}(V)$ era arbitrário e a topologia de $\mathbb{R}^3$ provém da métrica, $G^{-1}(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^3$. Logo, G é contínua.

Agora, seja $V \subseteq \mathbb{R}^4$ aberto. Como $F = G|_{S^2}$,

$$F^{-1}(V) = \{x \in S^2 :\ G(x) \in V\} = G^{-1}(V) \cap S^2.$$

Uma vez que $G^{-1}(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^3$, segue que $F^{-1}(V)$ é aberto em S^2 (topologia do subespaço). Portanto F é contínua.

Note que f é contínua. Primeiro, temos que $\pi(x) = \pi(x')$ implica $F(x) = F(x')$; de fato, cada coordenada de F é um polinômio homogêneo de grau dois, de modo que os dois sinais trocados se cancelam:

$$(-x_1)^2 - (-x_2)^2 = x_1^2 - x_2^2, \quad (-x_1)(-x_2) = x_1x_2, \quad (-x_1)(-x_3) = x_1x_3, \quad (-x_2)(-x_3) = x_2x_3,$$

ou seja, $F(-x) = F(x)$. Como $\pi(x) = \pi(x')$ significa exatamente $x' = \pm x$, a aplicação $f\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f\big(\{x, -x\}\big) := F(x)$ está bem definida: o valor não depende do representante escolhido. Ainda, todo elemento de $\mathbb{R}P^2$ é da forma $\{x, -x\}$, pois π é sobrejetora, e por construção, temos

$$f \circ \pi = F.$$

A Propriedade Universal da Topologia Quociente aplicado à sobrejeção π e ao espaço $\mathbb{R}P^2$ munido da topologia quociente, afirma que f é contínua se, e somente se, $f \circ \pi$ é contínua. Assim, pelos fatos constatados acima, segue que f é contínua.

Por fim, mostremos que f é injetora. Basta mostrar que, para $x, y \in S^2$,

$$F(x) = F(y) \implies y = \pm x,$$

pois $f(\{x,-x\}) = f(\{y,-y\})$ nos fornece $F(x) = F(y)$, donde $y = \pm x$ e portanto $\{x,-x\} = \{y,-y\}$.

Suponha $F(x) = F(y)$, isto é,

$$x_1^2 - x_2^2 = y_1^2 - y_2^2, \tag{I}$$

$$x_1x_2 = y_1y_2, \qquad x_1x_3 = y_1y_3, \qquad x_2x_3 = y_2y_3, \tag{II}$$

e, por estarem em S^2,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \tag{III}$$

Caso 1: $x_3^2 = y_3^2$. Vale a identidade algébrica

$$\left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 + 4\left(x_1x_2\right)^2 = x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 + 4x_1^2x_2^2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2,$$

e o mesmo com y no lugar de x. Por (I) e (II), os lados esquerdos coincidem, logo

$$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 = \left(y_1^2 + y_2^2\right)^2.$$

Como ambas as bases são não negativas, segue que $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$. Por (III) obtemos $x_3^2 = y_3^2$.
Caso 2: $x_3 \neq 0$. Então $y_3 \neq 0$ e $y_3 = \pm x_3$. Como queremos concluir $y = \pm x$ e vale $F(-y) = F(y)$, podemos trocar y por $-y$ se necessário e supor $y_3 = x_3 \neq 0$. Então por (II) obtemos

$$x_1x_3 = y_1x_3 \implies x_1 = y_1, \qquad x_2x_3 = y_2x_3 \implies x_2 = y_2,$$

cancelando $x_3 \neq 0$. Logo $y = x$.
Caso 3: $x_3 = 0$. Pelo Caso 1, $y_3 = 0$, donde (III) reduz-se a

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 = y_1^2 + y_2^2. \tag{IV}$$

Somando (I) e (IV) membro a membro, obtemos $2x_1^2 = 2y_1^2$; subtraindo (I) de (IV), $2x_2^2 = 2y_2^2$. Logo

$$|x_1| = |y_1| \qquad \text{e} \qquad |x_2| = |y_2|. \tag{V}$$

Devemos analisar três sub-casos;

(3i) $x_1 = 0$. Por (V), $y_1 = 0$; e (IV)nos fornece $x_2^2 = 1 = y_2^2$, donde $y_2 = \pm x_2$. Assim $y = (0, y_2, 0) = \pm(0, x_2, 0) = \pm x$.

(3ii) $x_2 = 0$. Simetricamente $y_2 = 0$ e $y_1 = \pm x_1$, donde $y = \pm x$.

(3iii) $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$. Por (V) também temos $y_1 \neq 0$ e $y_2 \neq 0$, e podemos escrever

$$y_1 = \varepsilon x_1, \qquad y_2 = \eta x_2, \qquad \varepsilon, \eta \in \{+1, -1\}.$$

Substituindo em (II): $x_1x_2 = y_1y_2 = \varepsilon\eta\, x_1x_2$. Como $x_1x_2 \neq 0$, cancela-se e resta $\varepsilon\eta = 1$, isto é, $\varepsilon = \eta$. Portanto $y = \varepsilon x = \pm x$.

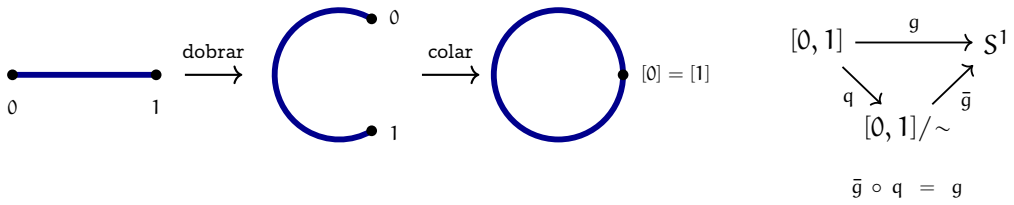
Em todos os casos $y = \pm x$, e assim concluímos que f é injetora. ■

Exercício 2.19

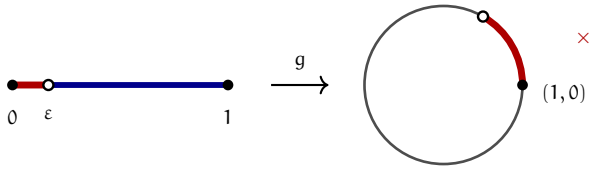
Seja $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ e $\sim$ a relação de equivalência sobre I: $x \sim x'$ se, e somente se, $\{x, x'\} = \{0,1\}$ ou $x = x'$. Mostre que $I/\sim$ é homeomorfo a S^1.

Solução. Sejam $q\colon I \to I/\sim$ a projeção quociente e $g\colon I \to S^1$, $g(t) = e(2\pi t)$ onde e é definida como no Lema 7. Agora, utilizando a figura abaixo como auxilio, vejamos que $\overline{g}$ existe, é contínua e bijetora.

A intuição: dobrar e colar

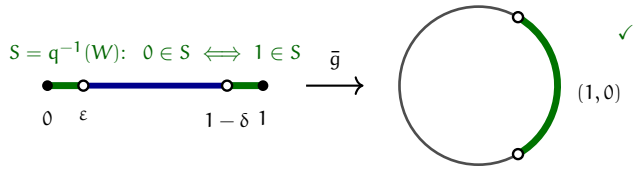


g *não* é aberta: um aberto S com $0 \in S$ mas $1 \notin S$



$g([0,\varepsilon))$ é arco *semiaberto*: contém $(1,0)$ sem ser vizinhança dele. Portanto o fato de $\overline{g}$ ser aberta **não** pode ser herdada da de g, ao contrário do que ocorreu na Fig. 2.4.

$\overline{g}$ *é* aberta: se W é aberto, $S = q^{-1}(W)$ satisfaz $0 \in S \iff 1 \in S$



Pela **Definição 5.1**, $S = q^{-1}(W)$ é aberto; e de $q(0) = q(1)$ vem $0 \in S \iff 1 \in S$. Além disso, $\overline{g}(W) = g(S)$. Como $g(1) = g(0)$, os dois pedaços verdes soldam-se num único arco aberto $\mathcal{A}(-2\pi\delta, 2\pi\varepsilon)$, de largura estritamente menor que 2π: aberto pelo Lema 7.

Para o caso $0 \notin S$, segue que $\overline{g}$ é aberta; sendo bijeção contínua e aberta, é homeomorfismo.

De fato, para $t, s \in [0,1]$, temos

$$g(t) = g(s) \iff t - s \in \mathbb{Z} \iff t = s \ \text{ ou } \ \{t,s\} = \{0,1\},$$

usando $|t - s| \leq 1$. Logo $g(t) = g(s)$ se, e somente se, $q(t) = q(s)$. Em particular, $q(t) = q(s)$ implica $g(t) = g(s)$, de modo que, pela Propriedade Universal da Topologia Quociente, existe $\overline{g} : I/\sim \to S^1$ contínua com $\overline{g} \circ q = g$; ela é sobrejetora porque g o é, e injetora pela recíproca daquela equivalência.

Note que $\overline{g}$ é uma aplicação aberta. Seja W aberto em $I/\sim$ e considere $S := q^{-1}(W)$, que por definição de τ_q é aberto em $[0,1]$. Além disso, como $\{0,1\}$ é uma classe de $\sim$, tem-se $q(0) = q(1)$ e portanto

$$0 \in S \iff q(0) \in W \iff q(1) \in W \iff 1 \in S.$$

Como $\overline{g}(W) = g(S)$, basta mostrar que $g(S)$ é aberto em S^1. Devemos analisar dois casos.

Caso I: $0 \notin S$ (logo $1 \notin S$). Então $S \subseteq (0,1)$. Sendo S aberto em $[0,1]$ e contido no aberto $(0,1)$ de $\mathbb{R}$, o conjunto S é aberto em $\mathbb{R}$ (Lema 4.1(i), notas de aula). Como feito no Exercício 2.15, S é união de intervalos abertos de comprimento estritamente menore que 1, e e g leva cada

um deles num arco de largura estritamente menor que 2π, aberto pelo Lema 7. Com isso, obtemos que $g(S)$ é aberto.

Caso II: $0 \in S$ **e** $1 \in S$. Como $S = O \cap [0,1]$ com O aberto em $\mathbb{R}$, existem $\varepsilon, \delta \in (0, \frac{1}{4})$ com

$$[0,\varepsilon) \subseteq S \qquad \text{e} \qquad (1-\delta, 1] \subseteq S.$$

Considere $S = S' \cup [0,\varepsilon) \cup (1-\delta,1]$, onde $S' := S \cap (0,1)$ é aberto em $\mathbb{R}$ pelo mesmo motivo do Caso I. Então

$$g(S) = g(S') \ \cup \ g\big([0,\varepsilon) \cup (1-\delta,1]\big).$$

A primeira parcela é aberta pelo Caso I. Quanto à segunda: como $g(1) = g(0)$, os ângulos percorridos por $t \in (1-\delta,1]$ e por $t \in [0,\varepsilon)$ formam, módulo 2π, o intervalo $(-2\pi\delta,\ 2\pi\varepsilon)$, isto é,

$$g\big([0,\varepsilon) \cup (1-\delta,1]\big) = \mathcal{A}\big(-2\pi\delta,\ 2\pi\varepsilon\big),$$

arco de largura $2\pi(\delta+\varepsilon) < \pi < 2\pi$, o qual é aberto pelo Lema 7. Como a união de dois abertos é aberta, concluímos o desejado.

Portanto, sendo $\bar{g}$ uma bijeção contínua e aberta, pelo Exercício 1.22, obtemos que $\bar{g}$ é homeomorfismo. ■

Exercício 2.20

Mostre que se $X_1 \simeq Y_1$ e $X_2 \simeq Y_2$, então $X_1 \times X_2 \simeq Y_1 \times Y_2$.

Solução. Sejam $f_i : X_i \to Y_i$ homeomorfismos e defina $F\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ por

$$F(x_1,x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Note que a aplicação $G(y_1,y_2) = (f_1^{-1}(y_1), f_2^{-1}(y_2))$ satisfaz $G \circ F = \mathrm{id}$ e $F \circ G = \mathrm{id}$, por aplicação coordenada a coordenada. Logo, F é uma bijeção com inversa G. Ainda, temos que as componentes de F são $f_1 \circ \pi_{X_1}$ e $f_2 \circ \pi_{X_2}$, ou seja, compostas de aplicações contínuas; portanto, contínuas. Logo, pelo Teorema 6.3 (notas de aula) temos que F é contínua.

Por fim, note que pelos mesmos argumentos, com f_i^{-1} no lugar de f_i, que são contínuas por hipótese, obtemos que G é contínua. Logo, F é um homeomorfismo. ■

Exercício 2.21

Sejam X, Y espaços metrizáveis com métricas d_X, d_Y. Mostre que

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\}$$

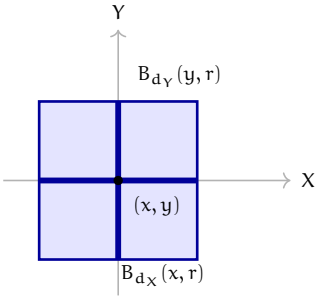
é uma métrica sobre $X \times Y$ que induz a topologia produto. Deduza que a topologia produto sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ coincide com a topologia usual sobre $\mathbb{R}^{n+m}$.

Solução. O fato de $d \geq 0$ segue pelo fato deste ser o máximo entre dois números maiores ou iguais que zero; e $d = 0$ se e somente se ambas as parcelas são nulas, isto é, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Observe que a simetria é herdada de d_X e d_Y. Ainda, escrevendo $p_i = (x_i, y_i)$,

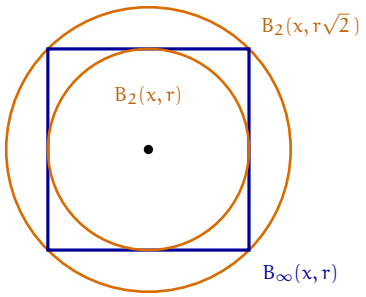
$$d_X(x_1, x_3) \leq d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3),$$

e o mesmo para d_Y. O máximo de dois números ambos majorados por $d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$ também o é, donde $d(p_1, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$, e assim obtemos a desigualdade triangular.

$$B_d\big((x,y),r\big) = B_{d_X}(x,r) \times B_{d_Y}(y,r) \qquad \|a\|_\infty \leq \|a\|_2 \leq \sqrt{k}\,\|a\|_\infty \quad (k=2)$$



pois $\max\{a,b\} < r$ se, e só se, $a < r$ e $b < r$. É esta identidade que liga as duas topologias.



$B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_2(x,r\sqrt{2})$: cada bola de uma métrica contém uma bola da outra em torno do mesmo ponto, logo as topologias coincidem.

Figura 2.5: A bola da métrica do máximo é o produto das bolas dos fatores; é daí que sai, nos dois sentidos, a igualdade entre a topologia de d e a topologia produto. No caso $X = Y = \mathbb{R}$, a bola do máximo é um quadrado, encaixado entre as bolas euclidianas de raios r e $r\sqrt{2}$, o que mostra que d_∞ e a métrica euclidiana induzem a mesma topologia em $\mathbb{R}^k$.

Além disso, uma vez que $\max\{a,b\} < r$ se, e somente se, $a < r$ e $b < r$, obtemos

$$B_d\big((x,y),r\big) = B_{d_X}(x,r) \times B_{d_Y}(y,r),. \qquad (*)$$

Note que uma aberto na topologia gerada por d, τ_d, é união de bolas abertas (na métrica d), e por $(*)$ cada uma dessas bolas é um elemento básico da topologia produto (veja Definição 6.1, notas de aula). Como a união de abertos é aberta, segue que $\tau_d \subset \tau_{X\times Y}$. Por outro lado, seja $U \times V$ básico e $(x,y) \in U \times V$. Como U é aberto em (X, d_X), existe $r_1 > 0$ com $B_{d_X}(x, r_1) \subseteq U$; análogo $r_2 > 0$ para V. Com $r := \min\{r_1, r_2\} > 0$, por $(*)$, obtemos

$$B_d\big((x,y),r\big) = B_{d_X}(x,r) \times B_{d_Y}(y,r) \subseteq U \times V.$$

Logo todo básico do produto é aberto em τ_d, e portanto todo aberto do produto também (Lema 2.5, notas de aula). Com isso, $\tau_{X\times Y} \subset \tau_d$. Com isso, a métrica d induz a topologia produto.

Para $p \geq 1$, escrevemos, para $u, v \in \mathbb{R}^p$,

$$d_p(u,v) := \Big(\sum_{i=1}^{p} |u_i - v_i|^2\Big)^{1/2} \quad \text{e} \quad \rho_p(u,v) := \max_{1\leq i\leq p} |u_i - v_i|,$$

para representar as métricas euclidianas e do máximo, respectivamente.

Denotamos por Φ a bijeção natural

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}, \qquad \Phi\big((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_m)\big) = (a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m).$$

No que segue, utilizaremos o seguinte resultado auxiliar presente no livro do Munkres:

Lema 8 (Lema 20.2, Munkres). *Sejam* d *e* d' *métricas sobre um mesmo conjunto* M*, e sejam* τ_d*,* $\tau_{d'}$ *as topologias induzidas. Então*

$$\tau_d \subseteq \tau_{d'} \iff \textit{para cada } x \in M \textit{ e cada } \varepsilon > 0 \textit{ existe } \delta > 0 \textit{ com } B_{d'}(x;\delta) \subseteq B_d(x;\varepsilon).$$

Agora, note que para todo $p \geq 1$, temos $\tau_{d_p} = \tau_{\rho_p}$, e essa é a topologia usual de $\mathbb{R}^p$. De fato, sabemos que para $w \in \mathbb{R}^p$,

$$\max_i |w_i| \;\leq\; \Big(\sum_i |w_i|^2\Big)^{1/2} \;\leq\; \big(p \cdot \max_i |w_i|^2\big)^{1/2} = \sqrt{p}\, \max_i |w_i|. \tag{A.1}$$

Dessa forma, utilizando o Lema 8 com $d = \rho_p$ e $d' = d_p$, dados x e $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$. Se $d_p(y,x) < \varepsilon$, então por (A.1) com $w = y - x$ obtemos $\rho_p(y,x) \leq d_p(y,x) < \varepsilon$. Logo

$$B_{d_p}(x,\varepsilon) \subseteq B_{\rho_p}(x,\varepsilon),$$

donde segue que $\tau_{\rho_p} \subseteq \tau_{d_p}$. Por outro lado, seja $d = d_p$ e $d' = \rho_p$. Dados x e $\varepsilon > 0$, tome $\delta := \varepsilon/\sqrt{p}$. Se $\rho_p(y,x) < \varepsilon/\sqrt{p}$, novamente utilizando (A.1) obtemos $d_p(y,x) \leq \sqrt{p}\,\rho_p(y,x) < \varepsilon$. Logo

$$B_{\rho_p}\big(x,\varepsilon/\sqrt{p}\big) \subseteq B_{d_p}(x,\varepsilon),$$

e assim $\tau_{d_p} \subseteq \tau_{\rho_p}$.

Portanto $\tau_{d_p} = \tau_{\rho_p}$; e τ_{d_p} é, por definição, a topologia usual de $\mathbb{R}^p$ (Exemplo 1.2 e Observação 1.3, notas de aula).

Ainda, note que Φ é uma isometria de $\big(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\, d\big)$ sobre $\big(\mathbb{R}^{n+m},\, \rho_{n+m}\big)$, onde $d = \max\{\rho_n, \rho_m\}$ é a métrica do enunciado. De fato, sejam $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, e ponha

$$z := \Phi(a,b) = (a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m), \qquad z' := \Phi(a',b') = (a'_1,\dots,a'_n,b'_1,\dots,b'_m).$$

As coordenadas de índice $1,\dots,n$ de z são as de a; as de índice $n+1,\dots,n+m$ são as de b, com $z_{n+j} = b_j$. Assim, temos que

$$\rho_{n+m}(z,z') = \max_{1\leq i\leq n+m} |z_i - z'_i| = \max\Big\{ \underbrace{\max_{1\leq i\leq n} |a_i - a'_i|}_{=\,\rho_n(a,a')},\; \underbrace{\max_{1\leq j\leq m} |b_j - b'_j|}_{=\,\rho_m(b,b')} \Big\} = d\big((a,b),(a',b')\big),$$

o que nos garante Φ ser uma isometria. Além disso, é sabido que uma bijeção isométrica leva bolas em bolas de mesmo raio, donde $\Phi\big(B_d(P,\varepsilon)\big) = B_{\rho_{n+m}}\big(\Phi(P),\varepsilon\big)$, e como as bolas formam base das duas topologias em questão, segue que Φ e Φ^{-1} levam básicos em básicos; logo Φ é homeomorfismo de τ_d sobre $\tau_{\rho_{n+m}}$.

Por fim, pelos fatos constatados acima, ao considerar $p = n$, obtemos que a topologia usual de $\mathbb{R}^n$ é τ_{ρ_n}; logo $\mathbb{R}^n$ é metrizável pela métrica ρ_n (com o mesmo ocorrendo para $\mathbb{R}^m$ com ρ_m); utilizando a primeira parte deste exercício, com $X = \mathbb{R}^n$, $d_X = \rho_n$, $Y = \mathbb{R}^m$ e $d_Y = \rho_m$, obtemos que

a topologia produto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é τ_d, onde $d = \max\{\rho_n, \rho_m\}$; pelo fato de Φ ser isometria, leva τ_d sobre $\tau_{\rho_{n+m}}$; e ainda, considerando $p = n + m$, segue que $\tau_{\rho_{n+m}}$ é topologia usual de $\mathbb{R}^{n+m}$. Com isso, obtemos

$$\Phi\big(\text{topologia produto de } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\big) = \Phi(\tau_d) = \tau_{\rho_{n+m}} = \text{topologia usual de } \mathbb{R}^{n+m},$$

o que termina o exercício. ■

Exercício 2.22

O gráfico de uma função $f\colon X \to Y$ é o subconjunto $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$. Mostre que se f é contínua, então seu gráfico é homeomorfo a X.

Solução. Denote por Γ_f o gráfico de f, considere sobre Γ_f a topologia induzida de $X \times Y$ e defina $\gamma\colon X \to \Gamma_f$ por $\gamma(x) = \big(x, f(x)\big)$. Note que γ é contínua, uma vez que vista como aplicação $X \to X \times Y$, suas componentes são id_X e f, ambas contínuas, e pelo Teorema 6.3 (notas de aula), temos $\gamma : X \to X \times Y$ é contínua.

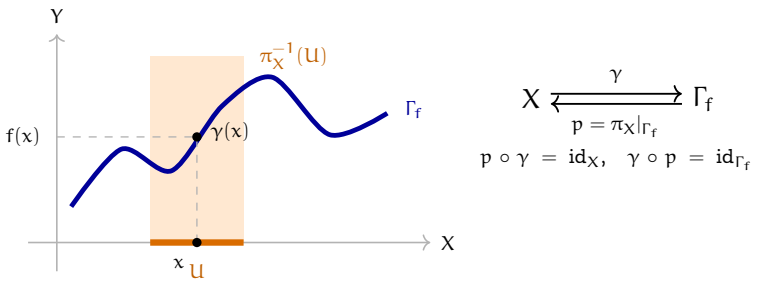
Ao analisar a restrição, um aberto de Γ_f é da forma $V \cap \Gamma_f$, com V aberto em $X \times Y$, e assim

$$\gamma^{-1}\big(V \cap \Gamma_f\big) = \{x : \gamma(x) \in V \text{ e } \gamma(x) \in \Gamma_f\} = \{x : \gamma(x) \in V\} = \gamma^{-1}(V),$$

pois $\gamma(x) \in \Gamma_f$ vale sempre. Logo $\gamma : X \to \Gamma_f$ é contínua. Ainda, note que γ é uma bijeção sobre Γ_f; a sobrejetividade segue pela definição de γ; para injetividade, basta observar que se $\gamma(x) = \gamma(x')$, comparando as primeiras coordenadas, obtemos $x = x'$.

Agora, observe que a inversa de γ é $p := \pi_X|_{\Gamma_f}\colon \Gamma_f \to X$ e é contínua. De fato, note que $p(\gamma(x)) = x$ e $\gamma\big(p(x, f(x))\big) = \gamma(x) = (x, f(x))$. Para U aberto em X,

$$p^{-1}(U) = \big\{(x, f(x)) : x \in U\big\} = \pi_X^{-1}(U) \cap \Gamma_f,$$



$p^{-1}(U) = \pi_X^{-1}(U) \cap \Gamma_f$: é o trecho do gráfico sobre a faixa laranja. Como $\pi_X^{-1}(U)$ é aberto em $X \times Y$, então $p^{-1}(U)$ aberto em Γ_f, *exibindo* o aberto do ambiente, como a definição exige.

Figura 2.6: A aplicação $\gamma(x) = (x, f(x))$ "levanta" X até o gráfico, e a projeção π_X restrita a Γ_f o traz de volta; as duas são mutuamente inversas. A continuidade de γ vem do Teorema 6.3 (componentes id_X e f); a de p, da identidade destacada acima.

e $\pi_X^{-1}(U)$ é aberto em $X \times Y$ pelo Teorema 6.1 (notas de aula). Logo, $p^{-1}(U)$ é aberto em Γ_f.

Portanto, concluímos que $\gamma\colon X \to \Gamma_f$ é um homeomorfismo. ■

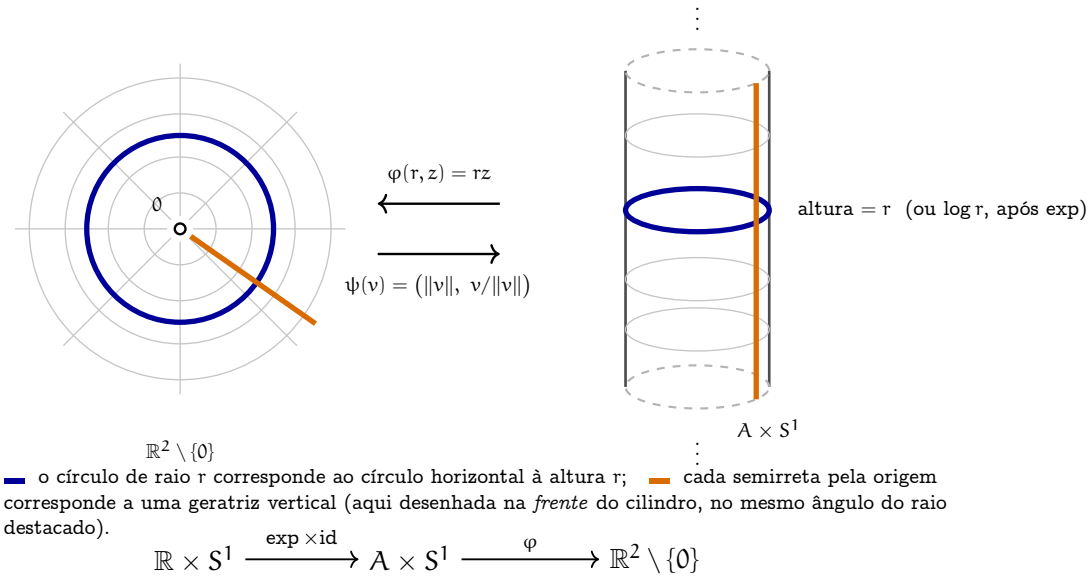
Exercício 2.23

Prove que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R} \times S^1$.

Solução. Considere $A := (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ e $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, ambos com as topologias induzidas, e defina $\varphi : A \times S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to A \times S^1$, respectivamente, por

$$\varphi(r, z) = rz \quad \text{e} \quad \psi(v) = \Big(\|v\|, \ \frac{v}{\|v\|} \Big).$$

Note que ambas as aplicações estão bem definidas. De fato, $\|\varphi(r,z)\| = r\|z\| = r > 0$ donde segue $\varphi(r,z) \neq 0$. Para ψ, note que $v \neq 0$ implica $\|v\| > 0$, e assim $\big\|v/\|v\|\big\| = 1$.



o círculo de raio r corresponde ao círculo horizontal à altura r; cada semirreta pela origem corresponde a uma geratriz vertical (aqui desenhada na *frente* do cilindro, no mesmo ângulo do raio destacado).

$$\mathbb{R} \times S^1 \xrightarrow{\exp \times \mathrm{id}} A \times S^1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Agora, note que φ é inversa para ψ (com o contrário também verdade); basta observar que

$$\varphi(\psi(v)) = \|v\| \cdot \frac{v}{\|v\|} = v, \qquad \psi(\varphi(r,z)) = \Big(\|rz\|, \ \frac{rz}{\|rz\|} \Big) = (r, z),$$

usando $r > 0$ e $\|z\| = 1$.

Também temos que φ e ψ são contínuas. De fato, com relação a φ, pelo Exercício 2.4, A e S^1 são metrizáveis pelas restrições das métricas euclidianas. Pelo Exercício 2.21, a topologia produto de $A \times S^1$ é induzida pela métrica

$$D\big((r,z),(r_0,z_0)\big) = \max\big\{|r - r_0|, \ \|z - z_0\|\big\}.$$

Fixe (r_0, z_0) e suponha $D\big((r,z),(r_0,z_0)\big) < 1$, de modo que $r < r_0 + 1$. Como $\|z_0\| = 1$,

$$\|rz - r_0 z_0\| = \big\|r(z - z_0) + (r - r_0)z_0\big\| \leq r\|z - z_0\| + |r - r_0| \leq (r_0 + 2)\, D\big((r,z),(r_0,z_0)\big).$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta := \min\{1, \ \varepsilon/(r_0 + 2)\}$ e note que se $D < \delta$ então $\|\varphi(r,z) - \varphi(r_0,z_0)\| < \varepsilon$. Logo $\varphi : A \times S^1 \to \mathbb{R}^2$ é contínua. Como φ toma valores em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, a restrição é contínua, uma vez que para V aberto em $\mathbb{R}^2$,

$$\varphi^{-1}\big(V \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})\big) = \varphi^{-1}(V).$$

Pelo Teorema 6.3 (notas de aula), para que ψ seja contínua, basta que as duas componentes o sejam. Considerando $\psi_1(v) = \|v\|$, observe que $\big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v - w\|$ implica que ψ_1 é 1-lipschitziana, logo contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; seus valores estão em A, e a restrição é contínua. Considerando $\psi_2(v) = v/\|v\|$, para $v, w \neq 0$ obtemos

$$\frac{v}{\|v\|} - \frac{w}{\|w\|} = \frac{\|w\|v - \|v\|w}{\|v\|\,\|w\|}, \qquad \|w\|v - \|v\|w = \|w\|(v - w) + \big(\|w\| - \|v\|\big)w,$$

donde $\big\|\|w\|v - \|v\|w\big\| \leq \|w\|\,\|v - w\| + \|v - w\|\,\|w\| = 2\|w\|\,\|v - w\|$ e assim

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} - \frac{w}{\|w\|} \right\| \leq \frac{2\,\|v - w\|}{\|v\|}.$$

Fixe $w_0 \neq 0$. Se $\|v - w_0\| < \|w_0\|/2$, então $\|v\| > \|w_0\|/2$ e

$$\|\psi_2(v) - \psi_2(w_0)\| \leq \frac{4}{\|w_0\|}\,\|v - w_0\|,$$

o que dá a continuidade em w_0 (tome $\delta = \min\{\|w_0\|/2,\ \varepsilon\|w_0\|/4\}$). Os valores estão em S^1, e a restrição é contínua.

Assim, φ é bijeção contínua com inversa contínua, donde $A \times S^1 \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Ainda, sabemos (cursos de Análise) que $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é contínua, bijetora (estritamente crescente, com limites 0 e $+\infty$, pelo Teorema do Valor Intermediário) e sua inversa $\log$ é contínua; assim temos $\mathbb{R} \simeq A$.

Por fim, utilizando o Exercício 2.20 aplicado a $\exp : \mathbb{R} \to A$ e $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$, obtemos

$$\mathbb{R} \times S^1 \ \cong\ A \times S^1 \ \cong\ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

o que termina o exercício. ■

Exercício 2.24

Mostre que a topologia produto sobre $X \times Y$ é a topologia mais fraca tal que as projeções π_X e π_Y são contínuas.

Solução. Primeiro, note que pelo Teorema 6.1 (notas de aula), a topologia produto torna as projeções contínuas.

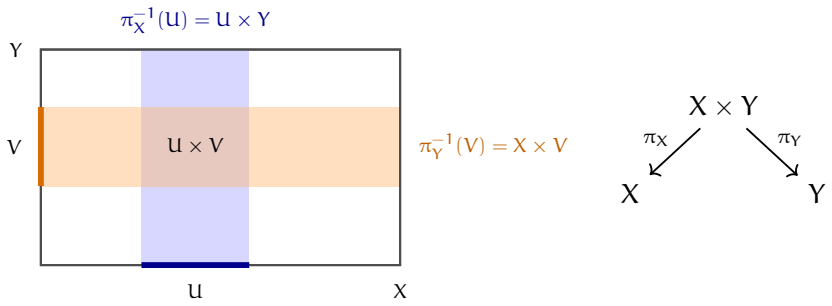
Agora, seja τ uma topologia sobre $X \times Y$ tal que $\pi_X \colon (X \times Y, \tau) \to X$ e $\pi_Y \colon (X \times Y, \tau) \to Y$ são contínuas. Sejam U aberto em X e V aberto em Y. Por continuidade,

$$\pi_X^{-1}(U) = U \times Y \in \tau \quad \text{e} \quad \pi_Y^{-1}(V) = X \times V \in \tau.$$

Como τ é topologia, é fechada por interseções finitas, donde

$$(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V \in \tau.$$

Assim todos os elementos básicos da topologia produto estão em τ. Pelo Lema 2.5 (notas de aula), todo aberto da topologia produto é união de elementos básicos; sendo τ fechada por uniões arbitrárias, conclui-se que a topologia produto está contida em τ. ■



Se τ é uma topologia sobre $X \times Y$ que torna π_X e π_Y contínuas, então a faixa azul $\pi_X^{-1}(U)$ e a faixa laranja $\pi_Y^{-1}(V)$ pertencem a τ; sendo τ fechada por interseção finita, o retângulo

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V)$$

também pertence. Logo τ contém todos os elementos básicos e, pelo Lema 2.5, contém a topologia produto inteira.

Figura 2.7: A figura representa a demonstração: o elemento básico $U \times V$ é a interseção de duas faixas, e cada faixa é a pré-imagem de um aberto por uma das projeções. Qualquer topologia que torne as projeções contínuas é, portanto, obrigada a conter todos os básicos do produto.

2.2 Extras P2

Exercício 2.25

Seja (X, τ) um espaço topológico e considere (S, τ_S), onde $S \subseteq X$. Então $F \subseteq S$ é fechado em S se, e somente se, existe $F_1 \subseteq X$ fechado tal que $F = S \cap F_1$.

Solução. Suponha que F seja fechado em S. Então, tem-se que $S \setminus F \in \tau_S$ e, portanto, existe $U \in \tau$ tal que $S \setminus F = S \cap U$. Mostremos que $F = S \cap (X \setminus U)$. Supondo $x \in F$, temos $x \notin S \setminus F$, ou seja, $x \notin S \cap U$ o que por sua vez implica $x \notin U$, uma vez que $x \in S$. Logo, $x \in X \setminus U$ e assim obtemos $x \in S \cap (X \setminus U)$. Por outro lado, se $x \notin F$ então $x \in S \setminus F$, ou seja, $x \in U$ (em particular) o que por sua vez implica $x \notin X \setminus U$. Concluímos então que de fato $F = S \cap (X \setminus U)$. Considerando $F_1 = X \setminus U$, obtemos o desejado.

Por outro lado, suponha que $F = S \cap F_1$, com F_1 fechado em X. Com isso, tem-se que

$$S \setminus F = S \setminus (S \cap F_1) = S \cap (X \setminus F_1),$$

o que nos garante $S \setminus F \in \tau_S$, concluindo o exercício. ■

Exercício 2.26

Seja $f: X \to Y$ uma função. Suponha que $X = \bigcup_\lambda U_\lambda$ é uma união de abertos U_λ, nos quais as restrições $f|_{U_\lambda}: U_\lambda \to Y$ são contínuas. Mostre que f é contínua.

Solução. Seja V um aberto arbitrário em Y. Uma vez que $f|_{U_\lambda}$ é contínua, obtemos

$$(f|_{U_\lambda})^{-1}(V) \in \tau_{U_\lambda}. \tag{2.1}$$

Ademais, note que

$$\begin{cases} (f|_{U_\lambda})^{-1}(V) = \{x \in U_\lambda : f|_{U_\lambda}(x) \in V\} = \{x \in U_\lambda : f(x) \in V\} \\ \\ f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\} = \{x \in \bigcup_\lambda U_\lambda : f(x) \in V\} \end{cases}$$

donde segue que

$$(f|_{U_\lambda})^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_\lambda, \text{ para todo } \lambda, \tag{2.2}$$

uma vez que ambos os conjuntos representam os pontos x em U_λ tais que $f(x) \in V$.

Por (2.1) e (2.2) atreladas ao fato de $X = \bigcup_\lambda U_\lambda$, obtemos

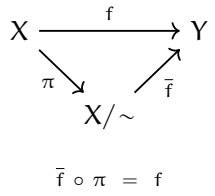
$$f^{-1}(V) = \bigcup_\lambda \left(f^{-1}(V) \cap U_\lambda\right)$$

é um aberto em X e, portanto, f é contínua. ■

Exercício 2.27

Seja (X, τ) um espaço topológico e $f\colon X \to Y$ uma aplicação sobrejetora, com $Y =: (Y, \tau_f)$. Ainda, suponha que em X tenhamos a seguinte relação de equivalência definida: $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \sim x_2$ se, e somente se, $f(x_1) = f(x_2)$. Mostre que $(X/\sim) \simeq Y$.

Solução. De início, é importante observarmos que a relação de equivalência em questão foi definida para que, de certo modo, tenhamos a injetividade na hora de verificar a existência do homeomorfismo. Isso posto, seja f a aplicação definida no enunciado e considere $\pi\colon X \to X/\sim$ a projeção natural, $\pi(x) = [x]$, onde $X/\sim$ está munido da topologia quociente determinada por π. Utilizaremos o diagrama a seguir para auxiliar no resolução do exercício.



Considere $\overline{f}\colon (X/\sim) \to Y$ por $\overline{f}([x]) = f(x)$, e note que $\overline{f}$ está bem definida. De fato, para $[x_1], [x_2] \in (X/\sim)$ temos

$$[x_1] = [x_2] \Leftrightarrow x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \overline{f}([x_1]) = \overline{f}([x_2]),$$

o que nos garante que $\overline{f}$ está, de fato, bem definida. Por argumentos similares, temos que $\overline{f}$ é injetora. Além disso, uma vez que f é sobrejetora, dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e, pela definição de $\overline{f}$ obtemos $\overline{f}([x]) = f(x) = y$. Logo, $\overline{f}$ é sobrejetora.

Agora, note que $\overline{f}$ também é contínua. Como f é contínua (pelo fato de estarmos munido Y da topologia quociente por f, veja Observação 5.2 das notas de aula), então a Propriedade Universal da Topologia Quociente nos garante que $\overline{f}$ é contínua, haja vista que $\overline{f} \circ \pi = f$. Ainda, seja

$g\colon Y \to (X/\sim)$ a inversa de $\bar{f}$ definida por $g(y) = [x]$, com $y = f(x)$ (pois f é sobrejetora), e note que por argumentos similares aos utilizados anteriormente, temos que g é contínua, haja vista que

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = [x] = \pi(x),$$

ou seja, $g \circ f = \pi$.

Portanto, sendo $\bar{f}$ uma bijeção contínua com inversa g também contínua. concluímos que $\bar{f}$ é um homeomorfismo. ■

Exercício 2.28

Considere $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de espaços topológicos, e considere $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Compare a topologia produto com a topologia da caixa (box topology) em X. Além disso, considere a sequência $\{w_i\}$ em $\mathbb{R}^\omega$ dada por

$$w_1 = (1, 1, \dots), \quad w_2 = (0, 2, 2, \dots), \quad w_3 = (0, 0, 3, 3, \dots), \quad \dots$$

Esta sequência é convergente com a topologia da caixa?

Solução. O problema: o que deve ser um "aberto" num produto infinito?

Seja $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de espaços topológicos. O produto cartesiano

$$X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

é o conjunto das funções x que a cada λ associam um ponto $x_\lambda \in X_\lambda$. Para cada $\mu \in \Lambda$ temos a projeção

$$\pi_\mu : X \to X_\mu, \qquad \pi_\mu(x) = x_\mu.$$

Queremos definir uma topologia para X. A ideia mais natural é tomar como abertos básicos os "retângulos generalizados" $\prod_\lambda U_\lambda$ com cada U_λ aberto. Quando Λ é *finito*, essa é a definição do Capítulo 6 das notas e não há mais o que discutir. Quando Λ é ***infinito***, há duas escolhas razoáveis, e elas ***não*** coincidem.

As duas definições (Munkres, §19)

Topologia da caixa $\tau_\square$. A base para essa topologia é dada por:

$$\mathcal{B}_\square = \left\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \ : \ U_\lambda \text{ aberto em } X_\lambda \text{ para } \textit{todo } \lambda \right\}.$$

Topologia produto τ_Π. Sabemos que a base é representada por:

$$\mathcal{B}_\Pi = \left\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \ : \ U_\lambda \text{ aberto em } X_\lambda, \text{ e } U_\lambda = X_\lambda \text{ para todo } \lambda \text{ fora de um conjunto } \textit{finito} \right\}.$$

A diferença entre elas pode ser representada na seguinte frase: na caixa, pode-se restringir *todas* as coordenadas; na produto, apenas um número *finito* delas.

Ambas são bases. Verifiquemos as duas condições da Definição 2.1 (notas de aula) para $\mathcal{B}_\square$ (para $\mathcal{B}_\Pi$ é idêntico). (i) $X = \prod_\lambda X_\lambda$ pertence à coleção, logo todo ponto está em algum elemento básico. (ii) A interseção de dois é

$$\Big(\prod_\lambda U_\lambda\Big) \cap \Big(\prod_\lambda V_\lambda\Big) = \prod_\lambda (U_\lambda \cap V_\lambda),$$

pois x está no lado esquerdo se, e somente se, $x_\lambda \in U_\lambda$ e $x_\lambda \in V_\lambda$ para todo λ. O lado direito é novamente um elemento da coleção, e pode ser tomado como o B_3 da Definição 2.1. No caso de $\mathcal{B}_\Pi$, se $U_\lambda = X_\lambda$ fora de F e $V_\lambda = X_\lambda$ fora de G, então $U_\lambda \cap V_\lambda = X_\lambda$ fora de $F \cup G$, *que ainda é finito*, e é só aqui que a finitude é usada.

Formulação por sub-base. A topologia produto é também a gerada pela sub-base

$$\mathcal{S} = \big\{\ \pi_\mu^{-1}(U_\mu)\ :\ \mu \in \Lambda,\ U_\mu \text{ aberto em } X_\mu\ \big\},$$

pois $\pi_\mu^{-1}(U_\mu)$ é o produto que restringe *uma só* coordenada, e interseções finitas desses conjuntos são exatamente os elementos de $\mathcal{B}_\Pi$. *A topologia da caixa não admite descrição análoga por sub-base com um número finito de interseções:* é esse o cerne da diferença.

Comparação entre as topologias

A produto é sempre mais grossa. Note que todo elemento de $\mathcal{B}_\Pi$ pertence a $\mathcal{B}_\square$, uma vez que a observação"$U_\lambda = X_\lambda$ salvo finitos" é uma *restrição*, não uma liberdade. Tomando uniões, obtemos

$$\boxed{\tau_\Pi \subseteq \tau_\square}$$

Se Λ é finito, elas coincidem. Se o conjunto de índices Λ é finito, a observação "salvo um número finito de índices" é automaticamente satisfeita por qualquer escolha dos U_λ: basta tomar o conjunto finito igual a Λ. Logo $\mathcal{B}_\Pi = \mathcal{B}_\square$ e $\tau_\Pi = \tau_\square$. É por isso que o Capítulo 6 (notas de aula), que trata de $X \times Y$, não precisa distinguir as duas noções, e tal distinção costuma causar uma confusão a primeira vista.

Se Λ é infinito, a inclusão é estrita. Para tal, vejamos o seguinte resultado.

Proposição. *Suponha Λ infinito e que exista uma infinidade de índices λ para os quais X_λ tenha um aberto U_λ com $\emptyset \neq U_\lambda \subsetneq X_\lambda$. Então $\tau_\Pi \subsetneq \tau_\square$.*

Prova. Escolha índices distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ e abertos próprios não vazios $U_{\lambda_k} \subsetneq X_{\lambda_k}$. Defina

$$B := \prod_\lambda V_\lambda, \qquad V_\lambda = \begin{cases} U_{\lambda_k}, & \lambda = \lambda_k, \\ X_\lambda, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

que é não vazio e pertence a $\mathcal{B}_\square$.

Suponha, por absurdo, que $B \in \tau_\Pi$ e tome $x \in B$. Existem $\prod_\lambda W_\lambda \in \mathcal{B}_\Pi$ e um conjunto finito $F \subseteq \Lambda$ com

$$x \in \prod_\lambda W_\lambda \subseteq B \qquad \text{e} \qquad W_\lambda = X_\lambda \text{ para } \lambda \notin F.$$

Como F é finito e os λ_k são infinitos e distintos, existe k com $\lambda_k \notin F$. Comparando coordenada a coordenada a inclusão $\prod_\lambda W_\lambda \subseteq B$ no índice λ_k nos fornece

$$X_{\lambda_k} = W_{\lambda_k} \subseteq V_{\lambda_k} = U_{\lambda_k} \subsetneq X_{\lambda_k},$$

o que sabemos ser um absurdo. □

Na prova acima, é importante observarmos onde a hipótese é usada. Se os X_λ fossem todos indiscretos, não haveria abertos próprios não vazios e as duas topologias coincidiriam mesmo com Λ infinito. A hipótese é, portanto, essencial e satisfeita em todos os exemplos usuais ($X_\lambda = \mathbb{R}$, por exemplo).

Três consequências que vocês devem guardar

(1) A propriedade universal vale para a produto e falha para a caixa.

Utilizando (Munkres, Teorema 19.6), com τ_Π,

$$f\colon A \to \prod_\lambda X_\lambda \text{ é contínua } \iff \pi_\lambda \circ f \text{ é contínua para todo } \lambda.$$

Tal argumento falha para $\tau_\square$. Tome

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega, \qquad f(t) = (t, t, t, \dots).$$

Cada componente $\pi_j \circ f = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ é contínua. Mas, com

$$B := \prod_{j\in\mathbb{N}} \left(-\tfrac{1}{j},\ \tfrac{1}{j}\right) \in \tau_\square, \qquad f(0) = 0 \in B,$$

tem-se

$$f^{-1}(B) = \left\{ t \in \mathbb{R} :\ |t| < \tfrac{1}{j} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \right\} = \{0\},$$

que não é aberto em $\mathbb{R}$. Logo f não é contínua para $\tau_\square$.

Ambas as topologias tornam as projeções contínuas. Mas a produto é a *mais grossa* com essa propriedade (compare com o Exercício 5 do Cap. 6, no caso de dois fatores), e é essa minimalidade que faz a propriedade universal funcionar. A caixa tem abertos demais: exigir que f^{-1} leve *todos* eles em abertos é exigir demais de f.

(2) Na caixa há menos sequências convergentes

Se $\tau_\Pi \subseteq \tau_\square$ e $x_i \to x$ em $\tau_\square$, então $x_i \to x$ em τ_Π (há menos vizinhanças a satisfazer). A recíproca falha; o exercício em questão exibe o contraexemplo padrão.

(3) Outras diferenças (apenas para guardar)

- *Metrizabilidade.* $\mathbb{R}^\omega$ é metrizável com τ_Π, e não é metrizável com $\tau_\square$.
- *Conexidade.* $\mathbb{R}^\omega$ é conexo com τ_Π; com $\tau_\square$ é desconexo (o conjunto das sequências limitadas e o das ilimitadas formam uma cisão).
- *O que* não *muda.* Ambas são de Hausdorff quando cada X_λ o é, e em ambas vale

  $$\overline{\prod A_\lambda} = \prod \overline{A_\lambda},$$

  veja Munkres, Teoremas 19.4 e 19.5.
- *Há algo entre as duas.* Em $\mathbb{R}^J$, a *topologia uniforme* satisfaz $\tau_\Pi \subsetneq \tau_{\text{unif}} \subsetneq \tau_\square$ quando J é infinito (Munkres, Teorema 20.4).

Agora, vejamos ultima pergunta do exercício com relaçao a sequência $\{w_i\}$ em $\mathbb{R}^\omega$.

Enunciado. Em $\mathbb{R}^\omega = \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$, considere

$$w_1 = (1,1,1,\dots), \quad w_2 = (0,2,2,\dots), \quad w_3 = (0,0,3,3,\dots), \quad \dots$$

isto é,

$$(w_i)_j = \begin{cases} 0, & j < i, \\ i, & j \geq i. \end{cases}$$

Esta sequência converge na topologia da caixa? **Não.**

Na topologia produto, temos $w_i \to 0$. Seja $\prod_j U_j \in \mathcal{B}_\Pi$ com $0 \in \prod_j U_j$: cada U_j é aberto em $\mathbb{R}$ com $0 \in U_j$, e $U_j = \mathbb{R}$ para todo j fora de um conjunto finito F. Ponha $N := 1 + \max F$ (ou $N := 1$ se $F = \emptyset$). Se $i \geq N$, então todo $j \in F$ satisfaz $j < i$, logo $(w_i)_j = 0 \in U_j$; e para $j \notin F$ não há restrição, pois $U_j = \mathbb{R}$. Portanto $w_i \in \prod_j U_j$ para todo $i \geq N$, isto é,

$$w_i \longrightarrow 0 \qquad \text{na topologia produto.}$$

Note que o único candidato a limite na caixa é 0. Suponha $w_i \to z$ em $\tau_\square$. Como $\tau_\Pi \subseteq \tau_\square$, todo aberto de τ_Π contendo z é também aberto de $\tau_\square$, e portanto contém w_i para i grande; logo $w_i \to z$ em τ_Π. Fixe $j \in \mathbb{N}$. A projeção π_j é contínua em τ_Π, de modo que a sequência numérica $\big((w_i)_j\big)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a z_j. Mas $(w_i)_j = 0$ sempre que $i > j$: essa sequência numérica é eventualmente nula, logo converge a 0. Pela unicidade do limite em $\mathbb{R}$, $z_j = 0$. Como j era arbitrário, $z = 0$.

Por fim, observemos que $w_i \not\to 0$ na caixa. Considere

$$B := \prod_{j\in\mathbb{N}} \Big(-\tfrac{1}{j},\ \tfrac{1}{j}\Big).$$

Cada fator é aberto em $\mathbb{R}$ e contém 0, logo $B \in \tau_\square$ e $0 \in B$. (Note que $B \notin \tau_\Pi$: *nenhum* fator é o $\mathbb{R}$ inteiro.) Afirmamos que *nenhum* termo da sequência pertence a B. De fato, olhe a coordenada de índice $j = i$ do termo w_i: como $i \geq i$,

$$(w_i)_i = i,$$

e pertencer a B exigiria

$$|i| < \tfrac{1}{i} \quad \Longleftrightarrow \quad i^2 < 1,$$

falso para todo $i \geq 1$.

Assim B é uma vizinhança de 0 que não contém termo algum da sequência. Logo $w_i \not\to 0$ em $\tau_\square$ e, portanto, $\{w_i\}$ **não converge** na topologia da caixa.

A figura abaixo ilustra o comportamento da sequência.

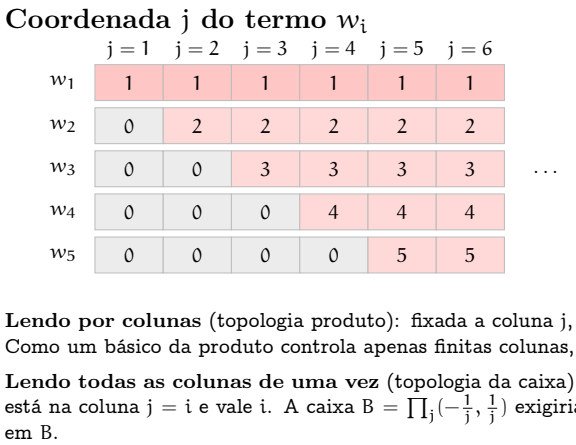


Figura 2.8: A mesma sequência converge na topologia produto e não converge na da caixa. A diagonal crescente é o obstáculo, e só a caixa a "enxerga", porque só ela controla todas as coordenadas simultaneamente.

Em resumo, é importante que vocês guardem os seguintes fatos observados neste exercício.

	produto τ_Π	**caixa $\tau_\square$**
básicos $\prod U_\lambda$	$U_\lambda = X_\lambda$ salvo finitos	todos os U_λ livres
Λ finito	coincidem	
Λ infinito	$\tau_\Pi \subsetneq \tau_\square$	
projeções contínuas	sim	sim
mais grossa com essa propriedade	**sim**	não
propriedade universal	**vale**	falha
$f(t) = (t, t, \dots)$ contínua	sim	não
$w_i \to 0$	sim	não (não converge)
$\mathbb{R}^\omega$ metrizável	sim	não
$\mathbb{R}^\omega$ conexo	sim	não

Para guardar: "Em produtos infinitos, a topologia da caixa tem abertos *demais*". Isso parece inofensivo, mas destrói as duas propriedades pelas quais se quer um produto: a caracterização da continuidade pelas componentes, e a boa noção de convergência coordenada a coordenada. Por isso "topologia produto" significa, por convenção, a definida no livro do Munkres (e notas de aula); a mais grossa que torna as projeções contínuas. ■

3. Exercícios para P3