[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Suponha que as hipóteses do Princípio do Argumento estejam satisfeitas. Sejam f e ζ funções analíticas em A. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\zeta(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \;=\; \sum_{k=1}^{p}\zeta(\alpha_k)m_{\alpha_k}(f)$$

onde α_k, $k \in [1,p]$, são os zeros de f na região interior a γ e $m_{\alpha_k}(f)$ representa a multiplicidade de α_k como zero de f.

Exercício 2. Suponha que f é uma função analítica no disco $D(0,r)$, onde $r > 1$, e $|f(z)| < 1$ para todo z satisfazendo $|z| = 1$. Mostre que existe um único $\eta \in D(0,r)$ que seja ponto fixo para f.

Exercício 3. Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $(f_n(z))$ uma sequência de funções analíticas em $\mathcal{U}$ que convergem uniformemente para uma função $f(z)$. Além disso, suponha que $f(z) \neq 0$, para todo $z \in D(z_0,r)$. Então, existe um $j \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq j$ a sequência $(f_n(z))$ e a função $f(z)$ possuem o mesmo número de zeros no disco $D(z_0,r)$.

Exercício 4. Suponha que f é analítica em $\mathbb{C}$, exceto por um número finito de singularidades. Então,

$$\operatorname{Res}(f,\infty) \;=\; -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right).$$