[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Prove ou forneça contra exemplos para os itens abaixo:

(a) Se η é um polo simples para um função f e g é uma função analítica em η, então

$$\operatorname{Res}(fg, \eta) \;=\; g(\eta)\operatorname{Res}(f, \eta).$$

(b) Se φ possui um polo simples em ζ, então $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ possui um polo simples em ζ e

$$\operatorname{Res}(1/\varphi(z), \zeta) \;=\; \frac{1}{\varphi'(\zeta)}.$$

(c) Sejam $\psi(z) = \dfrac{F(z)}{G(z)}$, onde F, G são funções analíticas em $D(z_0, R)$ tais que $F(z_0) \neq 0$, $G(z_0) = 0$ e G não é identicamente nula em $D(z_0, R)$. Então:

$$\operatorname{Res}(\psi, z_0) \;=\; \frac{F(z_0)}{G'(z_0)}.$$

Exercício 2. Suponha que ζ seja uma função analítica em $D(0, r) \setminus \{0\}$. Mostre que ζ possui uma singularidade removível na origem, desde que $\lim\limits_{z\to 0} \lim |z\zeta(z)| = 0$.

Exercício 3. Sejam $p(z) = \prod\limits_{j=1}^{n}(z - \alpha_j)$ um polinômio de grau $n \geq 2$ com α_j raízes distintas. Mostre que

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{p(z)}\, dz \;=\; 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\prod_{j\neq k}(\alpha_k - \alpha_j)},$$

onde $r > |\alpha_k|$, para $k = 1, 2, \ldots$. Além disso, verifique que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\prod_{j\neq k}(\alpha_k - \alpha_j)} \;=\; 0, \quad \text{para todo } \alpha_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\ .$$

Exercício 4. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_N} \frac{1}{z^2 \operatorname{sen} z}\, dz \;=\; \frac{1}{6} \;+\; 2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2},$$

onde γ_N é um caminho nas condições do Teorema dos Resíduos de Cauchy.

Exercício 5. Para os itens abaixo, determine e classifique as singularidades, calcule os resíduos (quando possível) e determine a parte principal da representação em série.

(a) $(1 - z^3)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$;

(b) $\dfrac{\cos z}{z^2 - z^3}$;

(c) $\dfrac{1}{z^4-1}$;

(d) $\dfrac{e^{z^2}}{z^n}$;

(e) $\dfrac{z^2+1}{z^2-z}$;

(f) $\dfrac{\cos z}{z}$.

Exercício 6. Mostre os itens abaixo:

(a) Seja $m \in \mathbb{N}^*$. Mostre que uma função f que é analítica em $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ possui um polo de ordem m em z_0 se, e somente se, f admite a seguinte representação em $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m}, \ h(z_0) \neq 0,$$

onde h é uma função analítica em $D(z_0, r)$.

(b) Sejam f uma função analítica em um aberto A de $\mathbb{C}$ e $z_0 \in A$. Prove que a função f tem um zero de ordem m em z_0 se, e somente se, a função $\dfrac{1}{f}$ tem um polo de ordem m em z_0.

Exercício 7. Calcule as integrais abaixo utilizando o Teorema dos Resíduos de Cauchy:

(a) $\oint_{|z|=2} \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}\, dz$;

(b) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \dfrac{1}{1-\cos z}\, dz$;

(c) $\oint_{|z|=2} \tan z\, dz$;

(d) $\oint_{\gamma} \dfrac{8-z}{z(4-z)}\, dz$, onde γ é o círculo centrado na origem, de raio 7 e orientado no sentido negativo;

(e) $\oint_{\gamma} \dfrac{1}{z^2+4z+13}\, dz$, onde γ é o caminho definido por $|z-3i| = 3$.