[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1.

(a) Suponha que duas séries de Laurent $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ convirjam em $D = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z-z_0| < \rho_2\}$, com $\rho_1 < \rho_2$. Se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n, \text{ para todo } z \in A,$$

então

$$a_n \;=\; b_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Suponha que duas séries de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ convirjam em um disco aberto $D(z_0, r)$, com $r > 0$. Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n, \text{ para todo } z \in D(z_0, r),$$

então

$$a_n \;=\; b_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 2. É possível que exista uma função inteira g tal que $g''\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$? Prove ou forneça um contra exemplo para justificar a sua afirmação.

Exercício 3. Seja $F \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{supp} \hat{F} \subset [-\tau/2\pi, \tau/2\pi]$. Então F tem tipo exponencial τ. Além disso, discorra sobre o significado de dizer que uma função F possui tipo exponencial τ.

Para este exercício, considere a seguinte definição:

Definição 1 (Tipo exponencial). Uma função inteira $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem tipo exponencial se

$$\tau(F) \;=\; \limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log|F(z)|}{|z|} \;<\; \infty.$$

Neste caso, dizemos que $\tau(F)$ é o seu tipo exponencial.

Dica: $\hat{F}$ denota a transformada de Fourier da função F dada por

$$\hat{F}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x t} F(x)\, dx.$$

Lembre também da inversão de Fourier da F.

Exercício 4. Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ uma região e ψ uma função analítica em $z_0 \in \mathcal{U}$, tal que $\psi'(z_0) \neq 0$. Mostre que existe $r > 0$ tal que

$$\int_\gamma \frac{\psi'(z_0)}{\psi(z) - \psi(z_0)}\, dz \;=\; 2\pi i,$$

onde γ representa a fronteira do disco aberto de centro z_0 e raio r.

Exercício 5. Prove que não existe uma função h tal que h seja analítica no disco centrado na origem $D \setminus \{0\}$, e ainda que h' possua um polo simples em 0.

Exercício 6. Encontre a série de Laurent das funções abaixo:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{e^{z^2} - 1}$ (analise de z a z^6). Mostre que a série converge para $0 < |z| < \sqrt{2\pi}$.

(b) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - z - 2}$ na região $1 < |z| < 2$.

(c) $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}$. Neste caso, escreva as duas representações possíveis, e especifique os domínios onde tas desenvolvimento é valido.

(d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ e $h(z) = \dfrac{1}{z^2}$ na região anelar $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - i| < \infty\}$.

Exercício 7. Seja $0 < \eta < 1$ e suponha que h seja uma função analítica num disco unitário tal que

$$|h(z) - h(w)| \leq K_1 |z - w|^{\eta},$$

para algum $K_1 \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma constante $K_2 > 0$ tal que

$$|h'(z)| \leq K_2 (1 - |z|)^{\eta - 1}.$$