[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Seja f uma função real contínua tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi]$, e considere $F(z)$ dada por

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos(zs)\, ds.$$

Mostre que $F(z)$ é uma função analítica.

Exercício 2. Mostre que se f é uma função inteira com parte imaginária limitada em $\mathbb{C}$, então f é uma função contante.

Exercício 3. Sejam $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira e $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Mostre que:

(a) se $\operatorname{Re} g(z) \leq \alpha$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então g é constante;

(b) se $(\operatorname{Re} g(z))^2 \leq (\operatorname{Im} g(z))^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então g é constante. Caso tivéssemos $(\operatorname{Re} g(z))^2 \geq (\operatorname{Im} g(z))^2$, o resultado obtido seria o mesmo?(Justifique sua resposta.)

Exercício 4. Seja h uma função analítica em $D(0, r)$, com $r > 0$. Mostre que

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{is})\cos^2\left(\frac{s}{2}\right)\, ds = 2h(0) + h'(0)$$

e

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{is})\operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{2}\right)\, ds = 2h(0) - h'(0)$$

$$\left[\textbf{Dica: Considere } \int_\gamma \left(2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\frac{h(z)}{z}dz, \text{ onde } \gamma(t) = e^{is} \text{ com } s \in [0, 2\pi].\right]$$

Exercício 5. Toda função harmônica e limitada em $\mathbb{C}$ é uma função constante.