[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz$, onde $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, e n é um inteiro positivo.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3} dz$, onde γ é o círculo $|z - i| = 1$.

Exercício 2. Mostre que toda função polinomial não constante em $\mathbb{C}$ é uma função sobrejetiva.

Exercício 3. Sejam φ e ψ funções inteiras.

(a) Suponha que φ e ψ sejam tais que

$$|\varphi(z)| < |\psi(z)|, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Mostre que existe uma constante $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(z) = \alpha\, \psi(z), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

(b) Determine todas as funções inteiras φ tais que

$$|\varphi'(z)| < |\varphi(z)|, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Exercício 4. Seja $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função harmônica tal que $u(z) \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que u é constante.

Exercício 5. Verifique se a afirmação é verdadeira ou falsa: "existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções analíticas em $D(0,1)$ tal que f_n converge uniformemente para $\overline{z}^3$ em qualquer compacto K de $D(0,1)$".

Exercício 6. Seja A um conjunto aberto e convexo de $\mathbb{C}$. Suponha que $f\colon A \to \mathbb{C}$ é contínua e satisfaz

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

para todo triângulo $\Delta \subset A$. Prove que f possui uma primitiva em A.

Exercício 7. Sejam f e g funções analíticas em conjunto aberto simplesmente conexo A e contínuas em $\overline{A}$.

(a) Mostre que $|f| + |g|$ atinge seu máximo em ∂A.

(b) Suponha que $A \subset \overline{D(0,1)}$ e seja $M > 0$ uma constante real. Mostre que se $|f(z)| \geq M$ para todo $z \in \partial D(0,1)$ e $|f(0)| < M$, então f tem pelo menos um zero em $D(0,1)$.