[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Considere $\gamma(t) = t + i|t|$ com $t \in [-1, 1]$. Verifique se γ é fechado, suave ou suave por partes.

Exercício 2. Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int_\gamma |z|^2 \, dz$, onde $\gamma(t) = t + it^2$ para $t \in [0, 1]$;

(b) $\displaystyle\int_{\gamma_j} \mathrm{Re}(z) \, dz$, onde para cada $j = 1, 2$ a curva ligando $z_0 = 1$ a $z_1 = i$ é dada por:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &=: \text{ fronteira do quadrado } \{x + iy; x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}; \\ \gamma_2 &=: \text{ fronteira do círculo } \{e^{it}; t \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z} \, dz$, onde γ é formada pelo semi-círculo orientado no sentido anti-horário $\{e^{it}; t \in [-\pi/2, \pi/2]\}$ e o segmento de reta $\{z; -1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1 \text{ e } \mathrm{Re}(z) = 0\}$.

(d) $\displaystyle\int_\gamma e^z dz$, onde γ é o caminho composto pelos segmentos ligando $z_1 = 0$ a $z_2 = 2$ e $z_2 = 2$ a $z_3 = 1 + i$.

Exercício 3. Seja γ um caminho suave dado por $\gamma(t) = re^{it}$, com $t \in [0, \pi]$, onde $r > 3$. Mostre que

$$\lim_{r \to \infty} \int_\gamma \frac{z + 1}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)} \, dz = 0,$$

sem calcular a integral.

Exercício 4. Sejam $r > 0$ e $\gamma(t) = re^{it}$, com $t \in [0, \pi/4]$. Mostre que

$$\left| \int_\gamma e^{iz^2} \, dz \right| \leq \frac{\pi(1 - e^{-r^2})}{4r}.$$

Exercício 5. Sejam γ um caminho suave definido em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ uma função contínua.

(a) Mostre que a função $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ é contínua em $\overline{\gamma}$ e que

$$\overline{\int_\gamma f(z) \, dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})} \, dz,$$

onde $\overline{\gamma}$ representa a reflexão de γ com relação ao eixo real.

(b) Considere $\gamma(t) = e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, orientada no sentido anti-horário. Mostre que

$$\overline{\int_\gamma f(z) \, dz} = -\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z^2} \, dz.$$

Exercício 6. Mostre que

$$\left| \int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\, dz \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{5}},$$

onde γ é o segmento ligando $z_1 = 2$ a $z_2 = 2 + i$.

Exercício 7. Calcule

$$\int_\gamma |z|^2\, dz,$$

onde γ é o caminho $[1, 1+i, i]$.