[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Para cada um dos itens a seguir, verifique que a função $u(x,y)$ é harmônica em um domínio apropriado D, encontre a respectiva função harmônica conjugada $v(x,y)$ e encontre a função analítica correspondente $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

(a) $u(x,y) = -e^{-x}\operatorname{sen}(y)$;

(b) $u(x,y) = \cos(x)\cosh(y)$.

Exercício 2. Seja u uma função harmônica em um domínio $D \subset \mathbb{C}$. Mostre que se v é uma conjugada harmônica de u em D, então uv é harmônica em D.

Exercício 3. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Mostre que se $u\colon D \to \mathbb{R}$ é harmônica então u possui uma função harmônica conjugada.
[Dica: Use a regra de Leibniz para derivar sob o sinal da integral.]

Exercício 4. Verifique se as séries de números complexos abaixo são convergentes ou divergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{(n-1)!}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+3i}{4}\right)^n$.

Exercício 5. Determine o raio de convergência para cada uma das séries abaixo:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$, $a \in \mathbb{C}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$, $a \in \mathbb{C}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, onde $a_n = n^2$ se n é primo e $a_n = 0$ se n não é primo.

Exercício 6. Desenvolva $f(z) = \dfrac{1}{z}$ em séries de potência em torno de $z-3$, $z+i$ e $z-i$ e determine os respectivos raios de convergência.

Exercício 7. Mostre que se $|z| < 1$ então

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

[Obs: Há dois modos de resolver este exercício. Mostre os dois.]