[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Mostre que se $|z| < 1$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}.$$

Exercício 2. Calcule as integrais abaixo:

(a) $\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}} dz$, onde $\gamma(t) = e^{it}$ com $t \in [0, \pi]$;

(b) $\int_\gamma z^n dz$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, onde $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ é dada por $\gamma(t) = e^{it}$;

(c) $\int_\gamma \frac{1}{z-2} dz$, onde $\gamma(t) = e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$. Caso o caminho fosse dado por $\beta(t) = 2 + e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, o resultado obtido seria o mesmo?(Justifique sua resposta).

(d) $\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z - \pi i} dz$;

(e) $\int_{|z|=1} \frac{\cos 2z}{z^5} dz$;

(f) $\int_{|z|=2} \frac{z - 3\cos z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz$.

Exercício 3. Verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Prove-as ou forneça um contra-exemplo para justificar sua afirmação

(a) Seja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira, não constante tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Então o conjunto $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}; |f(z)| < 1\}$ é ilimitado.

(b) Sendo $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\}$ e $p\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ um polinômio, então a integral de p sobre um caminho fechado suave por partes em $\mathcal{B}$ é igual a zero.

Exercício 4. (a) Seja $f = u + iv$ uma função inteira. Prove que se $u(z) \leq \alpha$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então f é uma função constante.

(b) Sejam f e h funções inteiras. Suponha que exista $a > 0$ tal que $\operatorname{Re} f(z) \leq a \operatorname{Re} h(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $f(z) = \alpha h(z) + \beta$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Exercício 5. Todo caminho suave é regular? Prove ou forneça um contra-exemplo.

Exercício 6. Mostre que

$$\lim_{r\to\infty} \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

onde $\gamma(t) = re^{it}$, com $t \in [0, \pi]$.

Exercício 7. Sejam A uma região simplesmente conexa em $\mathbb{C}$ e u uma função harmônica em A. Existe uma função analítica $f\colon A \to \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im} f(z) = u(z)$ para todo $z \in A$.

Exercício 8. Se f é uma função analítica em um domínio simplesmente conexo D que contém o caminho $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, então

$$f(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\; dt.$$

Exercício 9. Em aula, vimos diversos resultados (teoremas, corolários e proposições) que nos permitiram calcular determinadas integrais de forma conveniente, ou nos permitiram inferir que as funções com as quais estávamos trabalhando, possuíam determinadas propriedades (eram analíticas, constantes, entre outros). Enuncie tais resultados e discorra sobre sua importância.

Exercício 10. Determine o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(3n^2 + 5)(z + i)^n$.