Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Campus Rio Claro

1ª Avaliação: Funções de Variável Complexa 2

Prof: Lucas Ozaki 26/10/2022

Curso: Matemática (Bacharelado)

Nome: _____

Questões	Valores	Notas
1	1,0	
2	2,5	
3	1,5	
4	1,5	
5	2,0	
6	1,5	
Bônus	1,0	
Total	11,0	

Avisos: Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Caso o(a) aluno(a) possua algum material de consulta, o mesmo receberá nota ZERO na avaliação.

Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios.

Questão 1 (1 ponto). *Mostre que se* $|z| < 1$ *então*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \;=\; \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Questão 2 (2,5 ponto). *Calcule as integrais abaixo:*

(a) (1,0 ponto) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}dz$, *onde* $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, *e* n *é um inteiro positivo;*

(b) (1,5 ponto) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2z}dz$.

Questão 3 (1,5 ponto). *Mostre que toda função polinomial não constante em* $\mathbb{C}$ *é uma função sobrejetiva.*

Escolha "UMA" das questões abaixo para ser sua questão 4!

Questão 4 (1,5 ponto). *Seja* γ *um caminho suave dado por* $\gamma(t) = re^{it}$, *com* $t \in [0, \pi]$, *onde* $r > 3$. *Mostre que*

$$\lim_{r\to\infty}\int_\gamma \frac{z+1}{(z^2+4)(z^2+9)}\,dz \;=\; 0,$$

sem calcular a integral.

Questão 4 (1,5 ponto). *Mostre que*

$$\lim_{r\to\infty}\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz \;=\; 0,$$

onde $\gamma(t) = re^{it}$, *com* $t \in [0, \pi]$.

Escolha "UMA" das questões abaixo para ser sua questão 5!

Questão 5 (2 ponto). *(a) Seja* $f = u + iv$ *uma função inteira. Prove que se* $u(z) \leq \alpha$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$*, então* f *é uma função constante.*

(b) Sejam f *e* h *funções inteiras. Suponha que exista* $a > 0$ *tal que* $\operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} h(z)$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$*. Mostre que existem* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *tais que* $f(z) = \alpha h(z) + \beta$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$*.*

[Observação: Neste exercício, enuncie o resultado usado na resolução.]

Questão 5 (2 ponto). *Seja* $f(z)$ *uma função inteira satisfazendo*

$$|f(z_1 + z_2)| \ \leq \ |f(z_1)| \ + \ |f(z_2)|, \quad \textit{para todos } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Mostre que $f(z)$ *é um polinômio de grau no máximo* 1*.*

Questão 6 (1,5 ponto). *Sejam* A *um conjunto aberto simplesmente conexo em* $\mathbb{C}$ *e* $f\colon A \to \mathbb{C}$ *uma função analítica. Se existe um ponto* $z_0 \in A$ *tal que* $0 < |f(z_0)| \leq |f(z)|$*, para todo* $z \in A$*, então* f *é uma função contante.*

Questão Bônus (1 ponto). *Enuncie e demonstre o Teorema Fundamental da Álgebra.*

[Observação: Utilize argumentos vistos no curso de Funções de Variável Complexa 2.]

Boa Prova!