[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Considere as funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x)$. Mostre que

$$f'(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \frac{1}{x},\ x > 0.$$

Exercício 2. Considere φ e ψ funções reais que são deriváveis em um intervalo aberto I, com $p \in I$ e seja $F(x)$ uma função definida por

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq p, \\ \psi(x), & x < p \end{cases}.$$

Mostre que F é derivável em p se, e somente se, $\varphi(p) = \psi(p)$ e $\varphi'(p) = \psi'(p)$.

Exercício 3. Verifique a continuidade e derivabilidade das funções abaixo nos referidos pontos.

(i) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(ii) $g(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(iii) $h(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(iv) $\varphi(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

(v) $\psi(x) = \begin{cases} -x + 3, & x < 3 \\ x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$

(vi) $F(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$

Exercício 4. Considere f, g e h funções deriváveis. Mostre que

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Exercício 5. Calcule a derivada das funções abaixo.

(i) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$;

(ii) $f(x) = \dfrac{4x - x^4}{(x^3+2)^{2023}}$;

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}(x - \mathrm{sen}(x))}$;

(iv) $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)$;

(v) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$;

(vi) $f(x) = 3^x$;

(vii) $f(x) = e^{x^2}\ln(1 + \sqrt{x})$;

(viii) $f(x) = \dfrac{\cos(x^3)}{\sqrt{x}}$;

(ix) $f(x) = x^{x^x}$;

(x) $f(x) = (x+2)^x$.

Exercício 6. Resolva os itens abaixo.

(i) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$, que seja paralela à reta r: $8x-4y+1 = 0$, no ponto $P = (x_1, y_1)$.

(ii) Encontre uma parábola que passe pelo ponto $(1, 4)$ e cujas retas tangentes em $x = -1$ e $x = 5$ tenham inclinações 6 e -2, respectivamente.

(iii) Determine a quantidade de retas tangentes ao gráfico da função $y = \dfrac{x}{x+1}$ passam pelo ponto $(1, 2)$? Determine as equações dessas retas tangentes.