[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Um tanque contém 10 litros de café. Uma quantidade de café contendo 20 gramas de açúcar por litro é bombeada para dentro do tanque a 2 litros por minuto. Com base nisso, responda os itens abaixo:

(i) Encontre uma expressão para a concentração de açúcar após t minutos (em g/L).

(ii) Qual é a concentração de açúcar após um longo período de tempo?

Exercício 2. Na teoria da relatividade, a fórmula de contração de Lorentz é dada por

$$L(v) = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

e representa o comprimento L de um objeto em função de sua velocidade v em relação à um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto parado e c a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v\to c^-} L(v)$ e interprete o resultado. Além disso, por que o limite lateral a esquerda é necessário?

Exercício 3. A força gravitacional exercida pela Terra sobre um objeto a uma distância r do centro do planeta é dada por

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3}, & r < R \\ \\ \dfrac{GM}{r^2}, & r \geq R \end{cases},$$

onde M é a massa da Terra, R o seu raio e G a constante gravitacional. Diante disso, podemos afirmar que F é uma função contínua em termos de r?

Exercício 4. Um monge Tibetano deixa o monastério as $7:00$ A.M e começa sua caminhada usual até o topo de uma montanha, atingindo o topo as $7:00$ P.M. Na manhã seguinte, ele começa a caminhada de volta pelo mesmo caminho, partindo do topo da montanha as $7:00$ A.M e chegando ao monastério as $7:00$ P.M. Mostre que existe um ponto nesse caminho pelo qual o monge irá passar exatamente na mesma hora nos dois dias. Ou seja, o monge irá passar por esse ponto na mesma hora nos dois dias de caminhada.

Exercício 5. Considere a função de *Heaviside*

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}.$$

Essa função é nomeada em homenagem ao engenheiro elétrico Oliver Heaviside (1850-1925), e pode ser usada para descrever o comportamento de uma corrente elétrica a partir de $t = 0$.

(i) Faça um esboço do gráfico dessa função.

(ii) Analise a existência do limite quando t se aproxima de zero.

(iii) A função é contínua em $t = 0$?

Exercício 6. Verifique se $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$x^2\cos(x) \ \leq \ \varphi(x) \ \leq \ x\,\mathrm{sen}(x), \text{ para } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

é contínua em $x = 0$.

Exercício 7. Mostre que toda função contínua $f\colon [a,b] \to [a,b]$, com $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $a < b$, admite ao menos um ponto fixo. Ou seja, que f admite a seguinte propriedade: $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = x$.

Ainda com relação a questão de pontos fixos de uma função, tente "visualizar geometricamente" a questão de ponto fixo de uma função. Por fim, as funções $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^2 - 1$ possuem pontos fixos? Se sim, quais são? Visualize graficamente, caso existam, os pontos fixos para as funções $g(x)$ e $h(x)$.

Exercício 8. Encontre todas as funções $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tal que

$$\psi(\alpha x + \beta) + \gamma \ \leq \ x \ \leq \ \psi(x + \gamma) \ + \ \beta, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 9. Considere a função estritamente crescente $G(x) = \sqrt[x]{e^x - 1}$, onde $x > 0$, e $H(y)$ satisfazendo $H(y) = x$ se, e somente se, $G(x) = y$. Além disso, sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tais que $0 < \alpha < \beta < \gamma$, satisfazendo a seguinte equação

$$\alpha^x \ + \ \beta^x \ = \ \gamma^x.$$

Diante disso, escreva x em função de α, β e γ, da função H e de funções elementares.

Exercício 10. Para resolução deste exercício, consideremos novamente o exercício 7 (apenas a primeira parte dele). Ainda, considere os seguintes resultados vistos em aula:

- (Teorema do Valor Intermediário) Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for uma função contínua definida no compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$, e existir $\alpha \in (f(a), f(b))$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \alpha$.
- (Teorema do Anulamento) Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for uma função contínua em $[a,b]$, e $f(a)$ e $f(b)$ assumirem sinas contrários, então existirá $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Diante disso, mostre a seguinte cadeia de implicações:

exercício 7 $\Rightarrow$ Teorema do Valo Intermediário $\Rightarrow$ Teorema do Anulamento $\Rightarrow$ exercício 7.