[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Mostre que as funções abaixo são contínuas utilizando a definição - em termos de ε e δ.

(i) $f(x) = c$, com c sendo uma constante arbitrária;

(ii) $g(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exercício 2. Sejam f, g e h funções a valores reais tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se f e h são funções contínuas no ponto $x = \alpha$, com $f(\alpha) = h(\alpha) = g(\alpha)$, mostre que g é contínua no ponto $x = \alpha$.

Exercício 3. Analise a continuidade das funções abaixo.

(i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$;

(ii) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

Exercício 4. Verifique que o conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{x}{1 + x^2}; -2 \leq x \leq 2 \right\}$$

admite máximo e mínimo.

Exercício 5. Prove as afirmações abaixo.

(i) Todo polinômio de grau 3 admite pelo menos uma raiz real.

(ii) Todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

Exercício 6. Resolva os itens abaixo.

(i) Seja α uma constante real arbitrária, e considere φ uma função a valores reais dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha x + 2, & x > 1 \\ x^2 - 4x + 1, & x < 1 \end{cases}.$$

Encontre uma valor para α e $\varphi(1)$ de modo que φ seja contínua.

(ii) Considere uma função real h dada por

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \beta x + \eta, & 1 < x < 4 \\ -2x, & x \geq 4 \end{cases}.$$

Encontre um valor para as contantes β e η de modo que a função $h(x)$ seja contínua.

Exercício 7. Resolva os itens abaixo.

(i) Mostre que $p(x) = x^6 - 7x^3 + 2x^2 + 3$ possui ao menos uma raiz real;

(ii) Mostre que $e^x = 2\cos(x)$ possui uma solução positiva;

(iii) Mostre que $\frac{x}{2} = \operatorname{sen}(x)$ possui uma solução não nula.

(iv) $f(x) = x^5 + x + 1$ admite pelo menos uma raiz real no intervalo $I = [-1, 0]$.