[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Mostre utilizando a definição em termos de ε, δ os limites abaixo.

(i) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$;

(ii) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$.

Exercício 2. Calcule os limites abaixo utilizando as propriedades vistas em aula.

(i) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$;

(ii) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

(iii) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$;

(iv) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} [2\sin(x) - \cos(x) + \operatorname{cotg}(x)]$;

(v) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$;

(vi) $\lim_{x\to \frac{5}{2}} \dfrac{2x^2-3x-5}{2x-5}$;

(vii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(4+x)^2-16}{x}$;

(viii) $\lim_{x\to 1} \dfrac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1}$.

Exercício 3. Considere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que f é limitada inferiormente por $-x^2+3x$ (podendo ser igual), e limitada superiormente por $\frac{x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$ (sem a possibilidade de igualdade). Calcule o limite de $f(x)$ quando x tende a 1.

Exercício 4. Estude a continuidade das funções abaixo.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

(ii) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \sin(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 5. Mostre, utilizando a definição com ε, δ, as propriedades abaixo.

(i) Sendo $f, g\colon I \subset (\mathbb{R}\setminus\{p\}) \to \mathbb{R}$, I intervalo aberto, funções tais que $\lim_{x\to p} f(x) = L$ e $\lim_{x\to p} g(x) = K$, então

$$\lim_{x\to p}[f(x)+g(x)] = L + K \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to p}[f(x)g(x)] = LK;$$

(ii) A função valor absoluto, $|\cdot|$, é contínua.

Exercício 6. Calcule $\lim_{x\to 0} x^2 g(x)$, com $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo a função de Dirichlet[1].

[1] A função de Dirichlet é uma função que vale 1 em $\mathbb{Q}$ e 0 em $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.