[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, bem como os pontos de máximo e mínimo locais, caso existam, das funções abaixo.

(i) $\frac{e^x}{x}$;

(ii) $\frac{x^3}{x-2}$;

(iii) xe^x;

(iv) $\ln(1+x^2)$;

(v) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$;

(vi) $-\frac{x^4}{x^4-4}$;

(vii) $\frac{x^2-9}{x^2-4}$;

(viii) $\frac{16-x^2}{(x-2)^2}$;

(ix) x^5e^{-x};

(x) $2xe^{4-x}$.

Exercício 2. Assuma o Teorema do Valor Médio (TVM) como verdade. Prove ou forneça um contra-exemplo, para as desigualdades abaixo.

(i) $|\operatorname{sen}(\alpha)-\operatorname{sen}(\beta)| \leq |\alpha-\beta|$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(ii) $x^x(y-x) < y^y - x^x$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, onde $x \in [1, y)$;

(iii) $\frac{\beta-\alpha}{\alpha^2} \geq \frac{\ln(\beta)}{\beta} - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha}$, onde $1 \leq \alpha < \beta \leq e$.

Exercício 3. Prove o seguinte resultado: Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Se $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a,b)$, então f é constante em (a,b).

Exercício 4. Assuma o Teorema do Valor Médio (TVM) como verdade. Mostre ou forneça um contra-exemplo para a implicação abaixo:

$$\text{Se} \quad e < \alpha < e^2 \quad \text{então} \quad \alpha^{\ln(\alpha)} - e < 4e^3(\alpha - e).$$