[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Utilizando as técnicas e regras de derivação, calcule a derivada das funções abaixo.

(i) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

(ii) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

(iii) $(\ln(x))^2 + (1 + 2^{x^3})^x$;

(iv) $\ln(\operatorname{arctg}(x))$;

(v) e^{e^x};

(vi) $(e^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$;

(vii) $x^\pi + \pi^x$;

(viii) $(3 + \cos(x))^{\operatorname{tg}(x^2)}$;

(ix) $\dfrac{3x\cos(5x^2)}{e^{2x}}$;

(x) $x^3 \operatorname{sen}(x) + \dfrac{e^{2x}}{x^2}$;

(xi) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

(xii) $\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x) + \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}}$;

(xiii) $(x\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{tg}^4(x^7))^7$;

(xiv) $\arccos\left(\dfrac{1}{1-2x}\right)$;

(xv) $\sqrt[3]{\sec^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}$;

(xvi) $\dfrac{\operatorname{cossec}(x)}{2\sqrt{3} + \operatorname{tg}(x)}$.

Exercício 2. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico das funções abaixo nos respectivos pontos.

(i) $y = f(x)$, no ponto $(-1, 2)$, com

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{25}{3}(y^2 - x^2);$$

(ii) $y = g(x)$, no ponto $(1, 1)$, com

$$x^2y(x + 3y) = x^2 + 3y^2.$$

Exercício 3. Resolva os itens abaixo.

(i) Considere φ e ψ funções deriváveis, tais que

$$\varphi(x^2) = \sqrt{(\varphi \circ \psi)(x)},$$

onde $\varphi(4) = 1$, $\psi(2) = 4$ e $\varphi'(4) \neq 0$. Determine o valor de $\psi'(2)$.

(ii) Considere $H(x) = \dfrac{(x + F(x))^3}{4 - F(4x)}$, com $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}$, $F(1) = 0$, $F(4) = 3$, $F'(1) = 2$ e $F'(4) = 4$. Determine o valor de $H'(1)$.

(iii) Considere $G(x) = x\operatorname{sen}(\pi \cdot p(x))$, com $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}$, $p(3) = -\dfrac{1}{6}$ e $p'(3) = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$. Determine o valor de $G'(3)$.

(iv) Considere $h(x) = \dfrac{g(x)}{1+f(x)}$, com $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ e $g'(2) = 7$. Determine o valor de $h'(2)$.

Exercício 4. Resolva os itens abaixo.

(i) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e considere $F(x) = f(e^x)$ e $G(x) = e^{f(x)}$. Encontre as expressões para $F'(x)$ e $G'(x)$.

(ii) Suponha f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante, e considere $F(x) = f(x^\alpha)$ e $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encontre as expressões para $F'(x)$ e $G'(x)$.

(iii) Sejam $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, e considere

$$r(x) \;=\; (f \circ g \circ h)(x),$$

com $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$. Determine o valor de $r'(1)$.

(iv) Suponha que $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função duas vezes diferenciável e considere

$$f(x) \;=\; x^2 g(x^2).$$

Encontre uma expressão para f'' em termos de g, g' e g''.

(v) Suponha que $F(x) = f(3f(4f(x)))$ com $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $f(0) = 0$ e $f'(0) = 2$. Encontre $F'(0)$.

(vi) Suponha que $F(x) = f(xf(xf(x)))$ com $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$. Encontre $F'(1)$.

Exercício 5. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, tal que

$$f''(x) \;+\; 4f(x) \;=\; 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que

$$[f'(x) \cdot \operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x) \cdot f(x)]' \;=\; 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 6. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com g contínua em 0 e tais que

$$f(x) \;=\; xg(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f é derivável em 0.