[Importante: Cite os resultados que você utilizar na resolução dos exercícios!]

Exercício 1. Calcule a derivada das funções abaixo.

(i) $\dfrac{\ln(x^3)+2^{x^3}}{x^2+e^{\cos(x)}}$;

(ii) $\ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$;

(iii) $(x^2+1)^{\operatorname{sen}(x^5)}$;

(iv) $\dfrac{\ln(x)+5\cos(x)}{x^3-\operatorname{sen}(x)}$;

(v) $\dfrac{(x\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{tg}^4(x^7))^8}{x^2+1}$;

(vi) $\dfrac{x^7+\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)}$;

(vii) $(\operatorname{sen}(x))^{\sqrt{x}}$;

(viii) $\arctan\left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{3x+1}\right)\right)$.

Exercício 2. Um sólido será construído acoplando-se a um cilindro circular reto, de altura h e raio r, uma semi-esfera de raio r. Deseja-se que a área da superfície do sólido seja 5π. Determine r e h para que o volume seja máximo.

Exercício 3. Deseja-se construir uma caixa, de forma cilíndrica, de $1m^3$ de volume. Nas laterais e no fundo será utilizado um material que custa R\$10 o metro quadrado e na tampa um material de R\$20 o metro quadrado. Determine as dimensões da caixa que minimizem o custo do material empregado.

Exercício 4. A taxa (em mg de carbono por m^3/h) na qual a fotossíntese ocorre para uma espécie de fitoplâncton é modelada pala função

$$P(x) = \frac{100x}{x^2+x+4},$$

onde x representa a intensidade da luz. Para qual intensidade de luz P é máximo?

Exercício 5. Considere a seguinte situação: um retângulo encontra-se apoiado sobre o eixo x no primeiro quadrante com dois de seus vértices sobre a curva $\dfrac{x}{x^2+1}$. Ao rotacionar o retângulo sobre o eixo x, determine as dimensões do sólido obtido de modo que o mesmo obtenha o maior volume possível.

Exercício 6. Considere a função $\psi(x) = x^{-1}e^x$, a qual está definida no intervalo $(0,+\infty)$. Essa função possuí ponto de máximo ou mínimo? Além disso, considerando $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, é possível verificar a desigualdade abaixo? Se sim, prove-a. Caso contrário, forneça um contra-exemplo.

$$\frac{e^{\alpha+\beta}}{\alpha\beta} \geq e^2.$$

Exercício 7. Verifique se as desigualdades abaixo são verdadeiras. Prove-as ou forneça um contra-exemplo (caso elas sejam falsas).

(i) Mostre que $\cos(x) > 1 - \dfrac{x^2}{2}$, para todo $x > 0$.

(ii) Mostre que $\dfrac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha)} < \dfrac{\beta}{\alpha}$, sempre que $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

(iii) Mostre que $\dfrac{\arctan(x)}{x} \leq 1$, para todo $x > 0$.

Exercício 8. Verifique a seguinte desigualdade:

$$e^{\pi} > \pi^{e}.$$

Exercício 9. Esboce o gráfico das funções abaixo.

(i) $f(x) = x^5 - 5x^4$;

(ii) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$;

(iii) $h(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$.

Exercício 10. Verifique os itens abaixo. Prove-os ou forneça um contra-exemplo (caso eles sejam falsos).

(i) Para todo $x \geq 1$, temos

$$\left|\arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2}\right| \leq \frac{(x-1)^2}{2}.$$

(ii) Para todo $x > 1$, temos

$$\left|x\ln(x) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right| < \frac{(x-1)^3}{6}.$$

Exercício 11. Considere $\varphi\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = x + \ln(x)$, com $\psi = \varphi^{-1}$. Supondo que ψ possua derivada até ordem 2, calcule $\psi'(1)$ e $\psi''(1)$.

Exercício 12. Calcule os limites abaixo.

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$;

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$;

(iii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cossec}(x)}$;

(iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2x^2+1}$;

(v) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\cos(x)\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$;

(vi) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$.

Exercício 13. Utilizando polinômios de Taylor de ordem 1 e 2, calcule um valor aproximado para os itens abaixo e avalie o erro. Compare o erro cometido quando usado o polinômio de Taylor de ordem 1 e de ordem 2.

(i) $\sqrt[3]{7,9}$;

(ii) $\sqrt{0,8}$;

(iii) $\sqrt{3,9}$.